STOCHASTIC SYSTEMS WITH RETRIAL CALLS

Lebedev E.A., Ponomarov V.D. and Pryshchepa O.V.

leb@unicyb.kiev.ua

CONTENTS

1. INTRODUCTION

Classical retrial queues are characterized by the following feature: a call arriving when all servers are busy leaves the service area but after some random time repeats his demand. This feature plays a special role in several computer and communication networks as well. Other applications include stacked aircraft waiting to land, queues of retrial shoppers and so on. The results of retrial queues theory are accumulated in [7], [8]. In Ukraine the basic results for non-Markov retrial queues were obtained by I.N. Kovalenko and his pupils (see [9], [10], for example).

In this work it's assumed that the parameters of the retrial queue may be depended on the moving phase state of the service process (see [11], for example). From a mathematical standpoint, the assumed dependence complicates the retrial queue model. In this case the method of generating functions, which have proven its effectiveness for the classical models (see [7], for example) is not applicable and we develop another approach. Our paper is based on works [12][13][14]. The obtained results are parallel to constructions from [15]. Later on, this approach was used to find optimal parameters for state-dependent retrial queues in a set of threshold and hysteresis strategies. Thus, a class of models under consideration extends the field of applications.

2. ON A PROBLEM OF EXACT FORMULAS

Let us consider the well-known decidability problem in radicals of algebraic equation

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n = 0. \tag{1}$$

Formulas for a quadratic equation, *n=2,* were known as far back as the ancient Greeks.

The case *n=3* was closed at the beginning of the 16th century by the Italian mathematics Ferro, Tartaglia and Cardano. Since the formulas for cubic equation was first published by Cardano then they have his name.

In the 1545 year a pupil of Cardano Ferrari proposed a method whereby the equation of the fourth degree may be reduce to the cubic equation. Thus, the case *n=4* was also resolved.

By efforts of Ruffini, Abel and especially Galios it was shown that for *n>4* a general formula of a solution of the equation *(1)* does not exist in radicals (in time that is the end of the 18-th and the beginning of the 19-th century). The last result, of course, is unique. Before this result was obtained there were many unsuccessful attempts to construct a general formula for roots of the equation (1) for *n>4*.

Thus, the problem of explicit formulas construction for the equation *(1)* was entirely solved. Concepts and methods of its decision had a significant effect on development of algebra.

In theory of queues, one can see a line of analogs. Up to the present time, it is difficult to formulate them in rigorous mathematical manner.

For example, let us consider a problem of explicit formulas construction for stationary regime and a line of models

$$(M \mid M \mid 1) \to (M \mid E_r \mid 1 \vee E_r \mid M \mid 1) \to (M \mid GI \mid 1 \vee GI \mid M \mid 1) \to (GI \mid GI \mid 1).$$

Based on results of the queuing theory it may be stated that the explicit formulas are impossible in moving to the *GI/GI/1*- models.

This statement, of course, is nonstrict since in contrast to the example from algebra it is not a formalized formula concept and no mathematical tools which may be used in its construction are pointed out.

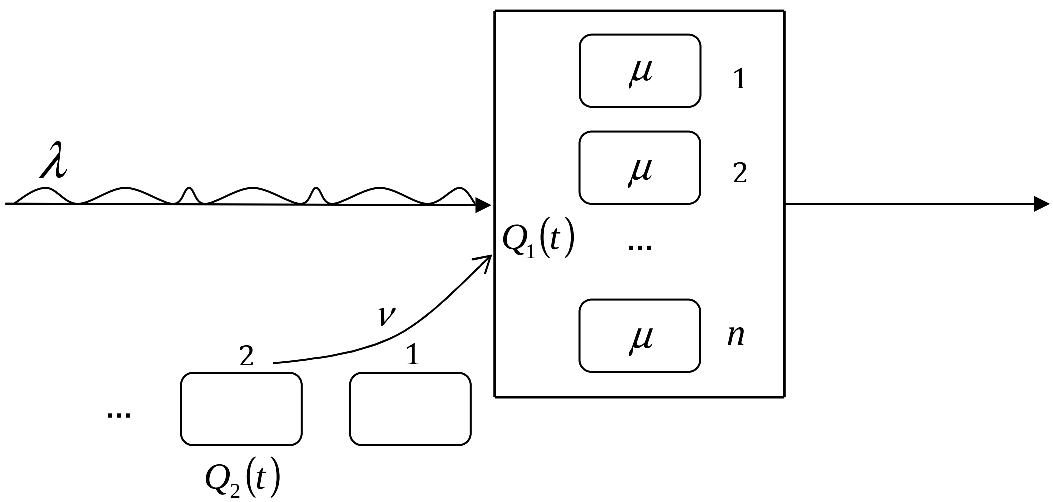
Another example may be found in a set of Markov models for the retrial queues of the *M/M/n*- type. It is probable that in this case a basic parameter, which extracts a set of decidable models from undecidable ones, is n – a number of servers.

Let us consider such queues in more details.

2.1. EXACT FORMULAS FOR CLASSICAL MARKOV RETRIAL QUEUES

Under classical Markov retrial queue, we will keep in mind such a model.

A Poisson flow of calls with rate λ arrives at the system input. If at the call arrival moment, there exist any free server then this call occupies one and its service process starts immediately. The service time is exponentially distributed with the parameter μ. Otherwise the call becomes a source of retrial calls. Each source of retrial calls, independently on others, generates a Poisson flow of retrial calls with parameter ν as long as a free server is found and service process of the retrial call begins.



Pic. 1. Structure of retrial queue.

In accordance with the accepted code system, we will denote the described above model by the code *M/M/n/*∞. The last symbol denotes the maximum number of the retrial calls.

In the *M/M/n/*∞-queue the calls service process $Q(t) = (Q_1(t), Q_2(t))^T$ is a two-dimensional Markov chain with continuous time in phase set $S=I\times J$, where $I=\{0, 1,$

…, *n}*, *J={0, 1, …}*, $Q_1(t)$ is a number of occupied servers, $Q_2(t)$ is a number of sources of retrial calls.

The infinitesimal rates $q_{(i,j)(i',j')}$ of the chain *Q(t)* are given by the following relations:

1. If *i=0,1,…,n-1*, $j \in J$, then

$$q_{(i,j)(i',j')} = \begin{cases} \lambda, \text{ under } (i', j') = (i+1, j), \\ i\mu, \text{ under } (i', j') = (i-1, j), \\ j\nu, \text{under } (i', j') = (i+1, j-1), \\ -(\lambda + i\mu + j\nu), \text{under } (i', j') = (i, j), \\ 0, \text{otherwise.} \end{cases} \tag{2}$$

2) If *i=n*, $j \in J$ then

$$q_{(n,j)(i',j')} = \begin{cases} \lambda, \text{ under } (i', j') = (n, j+1), \\ n\mu, \text{ under } (i', j') = (n-1, j), \\ -(\lambda + n\mu), \text{ under } (i', j') = (n, j), \\ 0, \text{ otherwise.} \end{cases} \tag{3}$$

It is well-known that under the condition

$$\frac{\lambda}{n\mu} < 1 \tag{4}$$

the chain *Q(t)* is ergodic and its limit distribution is the same as single stationary one.

In what follows we will always assume that the condition *(4)* is held and by π_{ij}, $(i, j) \in S$ we denote the stationary distribution of *Q(t)*.

Kolmogorov set of equations for π_{ij}, $(i, j) \in S$ takes the form

$$\begin{cases} (\lambda + i\mu + j\nu)\pi_{ij} = \lambda\pi_{i-1j} + (i+1)\mu\pi_{i+1j} + (j+1)\nu\pi_{i-1j+1}, if \quad 0 \le i \le n-1, \\ (\lambda + n\mu)\pi_{nj} = \lambda\pi_{n-1j} + (j+1)\nu\pi_{n-1j+1} + \lambda\pi_{nj-1}, if \quad i = n. \end{cases} \tag{5}$$

In the equations *(5)* the probabilities π_{-1j}, π_{i-1} must be omitted by the agreement.

In the solution of *(5)* it is necessary, of course, to take into account a normalizing condition

$$\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{n}\pi_{ij} = 1\,. \tag{6}$$

According to the work [7], we apply the method of generating functions for solution of (5).

Let us introduce the generating functions

$$\pi_i(z)=\sum_{j=0}^{\infty}\pi_{ij}z^j\ ,\ |z|\le 1,\ i=0,1,\dots,n\,.$$

Then the equation *(5)* for these functions is converted into the form

$$\begin{cases}(\lambda+i\mu)\pi_i(z)+\nu z\pi_i'(z)=\lambda\pi_{i-1}(z)+(i+1)\mu\pi_{i+1}(z)+\nu\pi_{i-1}'(z),\\ if\quad 0\le i\le n-1,\\ (\lambda+n\mu)\pi_n(z)=\lambda\pi_{n-1}(z)+\nu\pi_{n-1}'(z)+\lambda z\pi_n(z),\\ if\quad i=n.\end{cases} \tag{7}$$

Thus, to obtain explicit formulas for stationary probabilities of the retrial queue of the *M/M/n/∞*-type it is necessary to solve the system of the differential equations *(7)*.

Consider a case *n=1*.

The system (7) takes the form

$$\begin{cases}\lambda\pi_0(z)+\nu z\pi_0'(z)=\mu\pi_1(z)\\ (\lambda+\mu)\pi_1(z)=\lambda\pi_0(z)+\nu\pi_0'(z)+\lambda z\pi_1(z)\end{cases} \tag{8}$$

and is reduced to the equation

$$\nu(1-\rho z)\pi_0'(z)-\lambda\rho\pi_0(z)=0\,, \tag{9}$$

where $\rho=\lambda/\mu$ is a system load.

Taking into account the normalizing condition we find

$$\pi_0(z)=(1-\rho)\left(\frac{1-\rho}{1-\rho z}\right)^{\lambda/\nu},$$

$$\pi_1(z)=\rho\left(\frac{1-\rho}{1-\rho z}\right)^{1+\lambda/\nu},$$

and explicit formulas for the stationary probabilities

$$\pi_{0j}=(1-\rho)^{1+\lambda/\mu}\frac{\rho^j}{j!}\prod_{k=0}^{j-1}(k+\lambda/\nu)\,, \tag{10}$$

$$\pi_{1j}=(1-\rho)^{1+\lambda/\mu}\frac{\rho^{j+1}}{j!}\prod_{k=1}^{j}(k+\lambda/\nu)\,,\ j=0,1,\dots.$$

Similarly, we will study a retrial queue with two servers, a case *n=2*.

Now (7) is a system of three equations

$$\begin{cases} \lambda\pi_0(z) + \nu z\pi_0'(z) = \mu\pi_1(z), \\ (\lambda+\mu)\pi_1(z) + \nu z\pi_1'(z) = \lambda\pi_0(z) + 2\mu\pi_2(z) + \nu\pi_0'(z), \\ (\lambda+2\mu)\pi_2(z) = \lambda\pi_1(z) + \nu\pi_1'(z) + \lambda z\pi_2(z). \end{cases} \tag{11}$$

The system (11) can be reduced to the Gaussian hypergeometric differential equation

$$x(x-1)\varphi''(x) + [(\alpha+\beta+1)x - \gamma]\varphi'(x) + \alpha\beta\varphi(x) = 0, \tag{12}$$

where $x=\rho z$, $\rho=\lambda/2\mu$ is the load of the M/M/2/∞-queue,

$$\varphi(x) = \varphi(\rho z) = \pi_0(z),$$

$$\alpha = \left(\frac{\lambda}{\nu} + \frac{\mu}{2\nu}\right) + \sqrt{\left(\frac{\lambda}{\nu} + \frac{\mu}{2\nu}\right)^2 - \left(\frac{\lambda}{\nu}\right)^2},$$

$$\beta = \left(\frac{\lambda}{\nu} + \frac{\mu}{2\nu}\right) - \sqrt{\left(\frac{\lambda}{\nu} + \frac{\mu}{2\nu}\right)^2 - \left(\frac{\lambda}{\nu}\right)^2},$$

$$\gamma = 1 + \frac{3}{2}\frac{\lambda}{\nu} + \frac{\mu}{\nu}.$$

We will denote via $F(\alpha,\beta,\gamma;x)$ a hypergeometric function

$$F(\alpha,\beta,\gamma;x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!} \prod_{k=0}^{i-1} \frac{(\alpha+k)(\beta+k)}{\gamma+k}. \tag{13}$$

In terms of this function the partial solution of *(12)*, which is suitable to us, can be extracted

$$\pi_0(z) = \pi_{00} \cdot F(\alpha,\beta,\gamma;\rho z). \tag{14}$$

From (11) we find the remaining functions

$$\pi_1(z) = \pi_{00}\frac{\lambda}{\mu}F(\alpha,\beta,\gamma;\rho z) + \pi_{00}\frac{\nu}{\mu}\frac{\alpha\beta}{\gamma}\rho z F(1+\alpha,1+\beta,1+\gamma;\rho z)$$

$$\begin{aligned} \pi_2(z) = \pi_{00}\frac{\lambda^2}{2\mu^2}F(\alpha,\beta,\gamma;\rho z) + \pi_{00}\frac{\nu}{2\mu}\frac{\alpha\beta}{\gamma}\rho\left[(1+\frac{2\lambda}{\mu}+\frac{\nu}{\mu})z - 1\right]F(1+\alpha,1+\beta,1+\gamma;\rho z) + \\ + \pi_{00}\frac{\nu^2}{2\mu^2}\frac{\alpha(1+\alpha)\beta(1+\beta)}{\gamma(1+\gamma)}\rho^2 z^2 F(2+\alpha,2+\beta,2+\gamma;\rho z). \end{aligned} \tag{15}$$

The normalizing condition produces an explicit formula for π_{00} including $F(m+\alpha,m+\beta,m+\gamma;\rho)$, $m=1,2,3$ and *(14)*, *(15)* can be easily converted into explicit formulas for π_{ij}, $(i,j)\in S$.

For $n=3,4, \ldots$ it is impossible to extend this process of formulas construction. The fact is also relevant to the methods differing from the method of generating functions.

Thus, up to the present the problem of explicit formulas construction for stationary probabilities related to the $M/M/n/\infty$- queue for $n\geq 3$ remains opened.

2.2 STEADY STATE ANALYSIS OF QUEUES WITH CONSTANT RETRIAL RATE

In this section, we consider the models with substitution

$$j\nu \to \nu_j = \begin{cases} 0, & \text{under } j=0, \\ \nu, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Applications of such models may be found in [16], [17], [18]. Note that ergodicity condition for these Markov models follows from the theorem 1 from [19].

Lemma 1. The process $Q(t)$ is ergodic if and only if the following inequality is true

$$\rho_n = \frac{\lambda(\lambda+\nu)^n}{n!\nu \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(\lambda+\nu)^i}{i!\mu^{i-n}}} < 1. \tag{16}$$

Proof.

The necessary and sufficient ergodicity conditions of $Q(t)$ are (see [19], Theorem 1):

$$(\lambda+\mu)\cdot \pi_b(\lambda+\mu) < \mu,$$

where $\pi_b(\lambda+\mu)$ is a blocking probability of the standard $M\,|\,M\,|\,n\,|\,0$ Erlang model with the input rate $\lambda+\mu$ and the service rate ν.

Since

$$\pi_b(\lambda+\mu) = \frac{\frac{(\lambda+\mu)^n}{c!\nu^n}}{\sum_{i=0}^{n} \frac{(\lambda+\mu)^i}{i!\nu^i}},$$

then the process $Q(t)$ is ergodic if and only if $\rho_n < 1$.

Lemma is proved.

For analysis of stationary regime we introduce matrices which are determined by the model parameters:

$A = \|a_{ik}\|_{i,k=1}^{n}$ is a matrix with entries $a_{ii-1}=\nu$, $i=1,2,\ldots,n-1$,

$$a_{nk} = \begin{cases} \dfrac{n\nu\mu}{\lambda}, & k \neq n-1, \\ \dfrac{\nu[\lambda+n\mu]}{\lambda}, & k = n-1, \end{cases}$$

and all other elements are equal to 0;

$B = \|b_{ik}\|_{i,k=1}^{n}$ is a three-diagonal matrix with entries $b_{ii-1}=-\lambda$, $i=2,\ldots,n$; $b_{ii}=\lambda+\nu+(i-1)\mu$, $i=1,\ldots,n$; $b_{ii+1}=-i\mu$, $i=1,\ldots,n-1$;

$B_0 = B - \nu E$;

$C = \|c_{ik}\|_{i,k=1}^{n}$, where $c_{11}=1$; $c_{1k}=0$, $k=2,\ldots,n$; $c_{ik}=b_{i-1k}$, $i=2,\ldots,n$, $k=1,\ldots,n$;

$E = \|\delta_{ik}\|_{i,k=1}^{n}$ is the identity matrix;

$e_1 = (\delta_{11}, \quad \delta_{12}, \quad \ldots \quad \delta_{1n})^T$, δ_{ik} is the Kronecker delta.

The following proposition holds.

Lemma 2. Matrices B_0, B and C – are nonsingular and:

1. $B_0^{-1} = \|b_0^{(-1)}(i,k)\|_{i,k=1}^{n}$, where $b_0^{(-1)}(i,k) = \sum\limits_{j=(k-i)^+}^{n-i} \dfrac{(i+j-1)!\mu^j}{(i-1)!\lambda^{j+1}}$, $(k-i)^+ = \max(0, k-i)$.

2. $B^{-1} = \sum\limits_{p=0}^{\infty} B_1^p F^{-1}$, where F is a diagonal matrix with elements $f_{ii}=\lambda+\nu+(i-1)\mu$, $i=1,2,\ldots,n$ on the principal diagonal, B_1 is the matrix with non-zero elements, $b_1(i,i-1) = \dfrac{\lambda}{\lambda+\nu+(i-1)\mu}$, $i=2,\ldots,n$, $b_1(i,i+1) = \dfrac{i\mu}{\lambda+\nu+(i-1)\mu}$, $i=1,2,\ldots,n-1$.

Proof.

Let us prove the first point of the lemma. To find the inverse matrix of B_0 we use the Gauss-Jordan method. First, we successively add each row of the B_0 to the next row. As a result, we get two-diagonal matrix $\tilde{B}_0 = \|\tilde{b}_0(i,k)\|_{i,k=1}^{c}$, where $\tilde{b}_0(i,i) = \lambda$, $i=1,2,\ldots,n$, $\tilde{b}_0(i,i+1) = -i\mu$, $i=1,2,\ldots,n-1$. Then we divide each element of this matrix by λ and successively add the i-th row and the $(i+1)$-th multiplied by $\dfrac{i\mu}{\lambda}$, for $i=n-1,n-2,\ldots,1$. In that event we obtain the identity matrix. If we make the same manipulations with the identity matrix, we will obtain B_0^{-1}.

Let us consider the second point. In this case, we check the Adamar condition for the columns of the matrix *B*:

$$G_j \equiv \left|b_{jj}\right| - \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq j}}^{c} \left|b_{kj}\right| > 0, \quad j = 1,\dots,n.$$

$$G_j = \lambda + \nu + (j-1)\mu - (j-1)\mu - \lambda = \nu, \quad j = 1,\dots,n-1,$$

$$G_c = \lambda + \nu + (c-1)\mu - (c-1)\mu = \lambda + \nu.$$

The first set of the conditions hold for all $j=1,\dots,n$, which means nonsingularity of *B* (see Theorem 6.1.10 from [20]). B^{-1} can be obtained by decomposition of the inverse matrix:

$$B^{-1} = \left(F\left(E - B_1\right)\right)^{-1} = \left(E - B_1\right)^{-1} F^{-1} = \sum_{p=0}^{\infty} B_1{}^{p} F^{-1}.$$

Now let us proceed to the matrix *C*. As it is triangular therefore $|C| = \prod_{i=1}^{n-1} b_{ii+1} = (-1)^{n-1}(n-1)!\,\mu^{n-1} \neq 0$. Nonsingularity of *C* takes place.

Lemma is proved.

To construct a steady state distribution of the service process in the $M/M/n/\infty$-queue we should consider a similar queue with a truncated state space. Such a model operates similarly to the original queue but has a restriction on the maximum queue length: all new calls are lost when all servers are occupied and there are *N* calls in the orbit already. Formally, the service process in such queue is described by the Markov chain $Q(t,N) = (Q_1(t,N), Q_2(t,N))^T$, $Q_1(t,N) \in \{0, 1,\dots, n\}$, $Q_2(t,N) \in \{0,1,\dots,N\}$. Its infinitesimal rates $q^{(N)}_{(i,j)(i',j')}$, $(i,j),(i',j') \in S(N) = \{0,1,\dots,n\} \times \{0,1,\dots,N\}$ are equal to the $q_{(i,j)(i',j')}$ of the chain $Q(t)$ in all phase points except the boundary case $i=n, j=N$, where

$$q^{(N)}_{(n,N)(i',j')} = \begin{cases} n\mu, & under\,(i',j') = (n-1,N); \\ -n\mu, & under\,(i',j') = (n,N); \\ 0, & otherwise. \end{cases}$$

The phase space $S(N)$ of the process $Q(t,N)$ is finite, so $Q(t,N)$ has a steady state distribution and by $\pi_{ij}(N), (i,j) \in S(N)$ we can denote its stationary probabilities.

Let $\pi_j(N) = \left(\pi_{0j}(N), \ \dots, \ \pi_{n-1j}(N)\right)^T$ be a vector of the stationary probabilities. The following result holds.

Lemma 3. Steady state probabilities of the process *Q(t,N)* can be represented in the following form:

$$\pi_j(N) = \Delta_j(N) \cdot \pi_{00}(N),\ j = 0,1,\ldots,$$

where

$$\Delta_0(N) = B_0^{-1} B \Delta_1(N), \qquad \Delta_j(N) = \frac{(B^{-1}A)^{N-j} C^{-1} e_1}{e_1^T B_0^{-1} B (B^{-1}A)^N C^{-1} e_1},\ j = 1,2,\ldots.$$

Proof.

The probabilities $\pi_{ij}(N),\ \ j \neq N$, of the truncated queue satisfy the set of equations

$$\left[\lambda + (1-\delta_{j0})\nu + i\mu\right]\pi_{ij}(N) = \lambda\pi_{i-1\,j}(N) + (i+1)\mu\pi_{i+1\,j}(N) + \nu\pi_{i-1\,j+1}(N),$$

$$i = 0,1,\ldots,n-1, \qquad\qquad j = 0,1,\ldots,N-1, \tag{17}$$

which is parallel to (5).

Isolating the case j=0 and taking into consideration that

$$\nu\sum_{i=0}^{n-1}\pi_{ij+1}(N) = \lambda\pi_{nj}(N), \quad j = 0,1,\ldots N-1, \tag{18}$$

the equations (17) for the truncated queue can be rewritten in the vector-matrix form

$$A\pi_1(N) = B_0\pi_0(N),$$
$$A\pi_{j+1}(N) = B\pi_j(N),\ j = 1,2,\ldots,N-1.$$

For the boundary case $j=N$ we have

$$[\lambda + \mu]\pi_{0N}(N) = \nu\pi_{1N}(N),$$

$$\left[\lambda + \nu + i\mu\right]\pi_{iN}(N) = \lambda\pi_{i-1N}(N) + (i+1)\mu\pi_{i+1N}(N),$$

$$i = 0,1,\ldots,n-2.$$

If we supplement the above set of equations by the identity $\pi_{0N}(N) = \pi_{0N}(N)$ and write it in the vector-matrix form

$$C\pi_N(N) = e_1 \cdot \pi_{0N}(N)$$

then from the last equation we find

$$\pi_N(N) = C^{-1}e_1 \cdot \pi_{0N}(N). \tag{19}$$

Taking (19) into account we find

$$\pi_j(N) = \left(B^{-1}A\right)^{N-j} C^{-1} e_1 \pi_{0N}(N), j = 1,2,\ldots,N. \tag{18}$$

Thus, we obtain

$$\pi_0(N) = B_0^{-1} A \pi_1(N) = B_0^{-1} B \left(B^{-1}A\right)^N C^{-1} e_1 \pi_{0N}(N).$$

This provides a possibility to find the probability $\pi_{0N}(N)$:

$$\pi_{0N}(N) = \left\{e_1^T B_0^{-1} B \left(B^{-1}A\right)^N C^{-1} e_1\right\}^{-1} \pi_{00}(N).$$

Substituting the last expression into equation (18), we complete a proof of the Lemma 3.

Now we can proceed to studying the limit behavior of the vectors $\Delta_j(N)$, as $N \to \infty$. The following result takes place.

Lemma 4. The limits of the vectors $\Delta_j(N), j=0,1,\ldots$ as $N \to \infty$ are represented in the form:

$$\Delta_0 = B_0^{-1} B \Delta_1, \quad \Delta_j = \lim_{N\to\infty} \Delta_j(N) = \frac{uv^T C^{-1} e_1}{e_1^T B_0^{-1} B u v^T \left(B^{-1}A\right)^j C^{-1} e_1}, j = 1,2,\ldots,$$

where $u^T = (u_1, u_2, \ldots, u_c) > 0$, $v^T = (v_1, v_2, \ldots, v_c) > 0$ right and left eigenvectors of the matrix $B^{-1}A$, which correspond to the Perron root.

Proof.

Since the matrix $B^{-1}A>0$ (Lemma 2, the point 2) then by virtue of the Theorem 8.2.8 from [17] the N-th power of $B^{-1}A$ can be written in the following form:

$$\left(B^{-1}A\right)^N = r^N uv^T + o\left(r_1^N\right),$$

where $r_1<r$, r is the Perron root of the matrix $B^{-1}A$; u, v are the right and left Perron vectors and moreover $u^Tv=1$.

We substitute this expression into the formula for the vector $\Delta_j(N), j=1,2,\ldots$:

$$\Delta_j(N) = \frac{(B^{-1}A)^{N-j} C^{-1} e_1}{e_1^T B_0^{-1} B (B^{-1}A)^N C^{-1} e_1} = \frac{\left(uv^T r^{N-j} + o\left(r_1^{N-j}\right)\right) C^{-1} e_1}{e_1^T B_0^{-1} B \left(uv^T r^{N-j} + o\left(r_1^{N-j}\right)\right) (B^{-1}A)^j C^{-1} e_1}. \tag{21}$$

Let us divide a numerator and a denominator of (21) on r^{N-j} and take the limit as $N \to \infty$:

$$\Delta_j = \lim_{N\to\infty} \Delta_j(N) = \frac{uv^T C^{-1} e_1}{e_1^T B_0^{-1} B uv^T \left(B^{-1}A\right)^j C^{-1} e_1}.$$

The matrix uv^T is presented both in numerator and denominator of the expression for Δ_j, so we can omit the normalizing condition $u^T v=1$ for the Perron vectors u and v.

Thus the Lemma 4 is proved.

To state and prove the main theorem of the current chapter we need an auxiliary result.

Lemma 5. If the condition of (16) holds, then

$$\sum_{j=1}^{\infty} 1^T(n)\Delta_j < \infty, \tag{22}$$

where $1^T(n)$ is n-dimensional vector with unit entries.

Proof.

Under the condition of the Lemma 1, the process $Q(t)$ is ergodic and the probability $\pi_{00}>0$ exists. Using the results from [7] (the Theorem 2.3 and 2.4 from the Chapter 2) on the stochastic ordering of probability distributions for migration processes, we find:

$$\lim_{N\to\infty} \pi_{00}(N) = \pi_{00} > 0. \tag{23}$$

Taking into account the results of Lemma 3 and the normalizing condition for steady state probabilities of the process $Q(t,N)$ we obtain:

$$\pi_{00}(N) = \left\{1^T(n)\Delta_0(N) + \frac{\lambda+\nu}{\lambda}\sum_{j=1}^{N} 1^T(n)\Delta_j(N)\right\}^{-1}.$$

We will prove the Lemma 5 by reduction ad absurdum. For this purpose we suppose that the series (22) does not converge. This means that for any large $L>0$ exists number $M=M(L)$ such as:

$$\frac{\lambda+\nu}{\lambda}\sum_{j=1}^{M} 1^T(n)\Delta_j > L.$$

It is easy to verify that

$$\pi_{00}^{-1} = \lim_{N\to\infty} \pi_{00}^{-1}(N) = \lim_{N\to\infty}\left\{1^T(n)\Delta_0(N) + \frac{\lambda+\nu}{\lambda}\sum_{j=1}^{N} 1^T(n)\Delta_j(N)\right\} \geq$$

$$\geq \lim_{N\to\infty}\left\{1^T(n)\Delta_0(N)+\frac{\lambda+\nu}{\lambda}\sum_{j=1}^{M}1^T(n)\Delta_j(N)\right\}=1^T(n)\Delta_0+\frac{\lambda+\nu}{\lambda}\sum_{j=1}^{M}1^T(n)\Delta_j>1^T(n)\Delta_0+L\,.$$

Thus $\pi_{00}=0$, that contradicts (23).

The Lemma 5 is proved.

The following theorem contains explicit vector-matrix formulas for steady state probabilities through the model parameters.

Theorem 1. If condition (16) holds for the *M/M/n/∞*- queue with constant retrial rate, then:

$$\pi_j=uv^TC^{-1}e_1\left[e_1^TB_0^{-1}Buv^T(B^{-1}A)^je_1\right]^{-1}\pi_{00}\,,$$

$$\pi_{nj}=\frac{\nu}{\lambda}1^T(n)uv^TC^{-1}e_1\left[e_1^TB_0^{-1}Buv^T(B^{-1}A)^{j+1}e_1\right]^{-1}\pi_{00}\,,$$

$$j=0,1,\ldots,$$

where

$$\pi_{00}=\left\{1^T(n)uv^TC^{-1}e_1\left[e_1^TB_0^{-1}Buv^TC^{-1}e_1\right]^{-1}+(1+\frac{\nu}{\lambda})\sum_{j=1}^{\infty}1^T(n)uv^TC^{-1}e_1\left[e_1^TB_0^{-1}Buv^T(B^{-1}A)^jC^{-1}e_1\right]^{-1}\right\}^{-1}.$$

A conclusion of the Theorem 1 is a direct consequence from the Lemmas 3, 4. The probabilities π_{nj}, $j=0,1,\ldots$ can be found from the equations (18), and probability π_{00} – from the normalizing condition.

From Theorem 1, we can obtain an explicit form of the stationary probabilities through spectral characteristics of the matrix $B^{-1}A$.

Corollary 1. If the process $Q(t)$ satisfies the condition of Lemma 1, then:

$$\pi_0=B_0^{-1}Auv^TC^{-1}e_1H^{-1},\quad \pi_j=r^{-j}uv^TC^{-1}e_1H^{-1},\quad j=1,2,\ldots,$$

$$\pi_{nj}=\frac{\nu}{\lambda}r^{-j-1}1^T(n)uv^TC^{-1}e_1H^{-1},\quad j=0,1,\ldots, \tag{24}$$

where $H=1^T(n)\left(B_0^{-1}A+\dfrac{1+\nu/\lambda}{r-1}E\right)uv^TC^{-1}e_1$.

Note that the formulas (24) are simpler than the modified matrix-geometric form of the stationary probabilities, which is evident from the commonly accepted theory of the QBD-processes (see, for example, [2], p. 196). They describe a structure of stationary distribution (the weighted geometric type) more precisely and provide explicit formulas for main performance measures.

Now, let us compare the formulas with results obtained from other authors. Corollary 1 derives explicit scalar formulas for the *M/M/2/∞*-queue that coincide with the results of [17] up to notation.

Let us construct the explicit form of steady state distribution for the queue with three servers. We introduce the following notation $B^{-1}A = D = \|d_{ik}\|_{i,k=1}^{3}$. It is obvious that elements of the matrix D can be explicitly found in terms of parameters λ, μ, ν which define *M/M/3/∞*-queue.

Corollary 2. If the condition (16) is true then steady state probabilities of the *M/M/3/∞*-queue exist and are given by Theorem 1, where the Perron root

$$r = \frac{1}{2}(d_{11} + d_{22} + d_{33}) + \frac{1}{2}\sqrt{(d_{11} - d_{22} - d_{33})^2 + 4(d_{12}d_{21} + d_{13}d_{31} + d_{32}d_{23} - d_{22}d_{33})}$$

and positive right and left Perron vectors can be written in the following form:

$$u^T = g^{-1}(g, d_{23}d_{13} - d_{21}(d_{33} - r), d_{32}d_{21} - d_{31}(d_{22} - r)),$$

$$v^T = g^{-1}(g, d_{13}d_{32} - d_{12}(d_{33} - r), d_{12}d_{23} - d_{13}(d_{22} - r)),$$

$$g = (d_{22} - r)(d_{33} - r) - d_{32}d_{23}.$$

The *M|M|3|∞*-queue with constant rate of retrial calls was studied in [18] where the recurrent scheme was proposed to calculate the steady state probabilities. In contrast to this result we have developed an approach that gives explicit formulas.

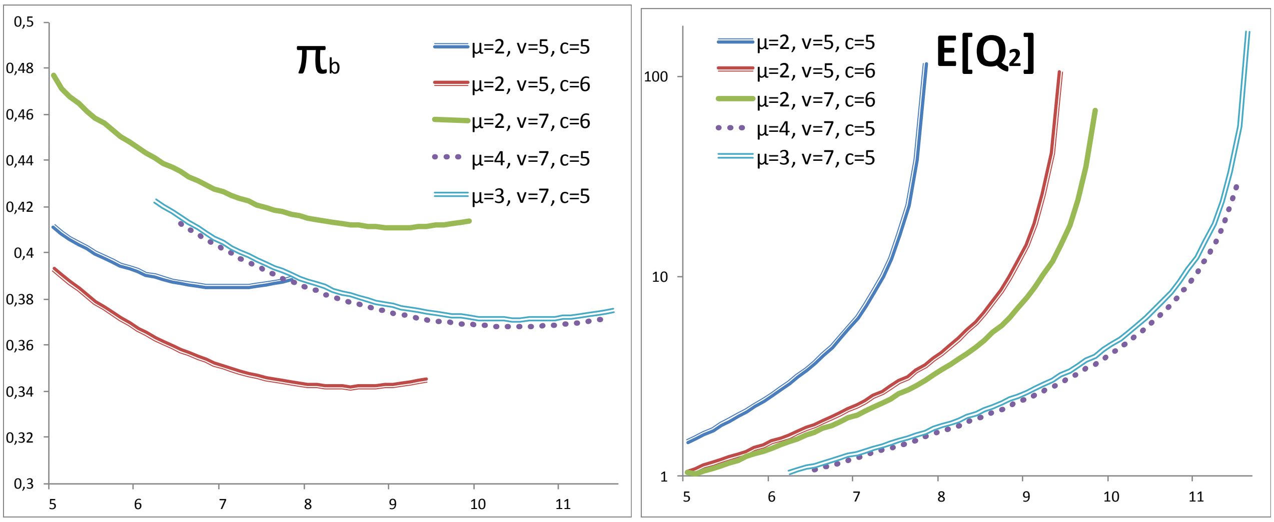
Since $|B^{-1}A| = |B^{-1}| \cdot |A| = 0$ then the characteristic equation $|B^{-1}A - zE| = 0$ has a root $z=0$. Therefore we can always write an explicit form of the Perron root and steady state probabilities via the parameters of the *M/M/n/∞*-queue in cases $n=1,2,\ldots,5$. To find the Perron root r and the corresponding Perron vectors in case $n>5$ (and also under $n \le 5$) one can use efficient computation algorithms form [20] (chapter 8.5).

Now we calculate some performance measures of retrial queues using the obtained formulas. The blocking probability π_b and the average number of calls in the orbit $E[Q_2]$ were chosen as one of the main characteristics of the retrial queues. Taking into account the results of Theorem 1 they are calculated by the following formulas:

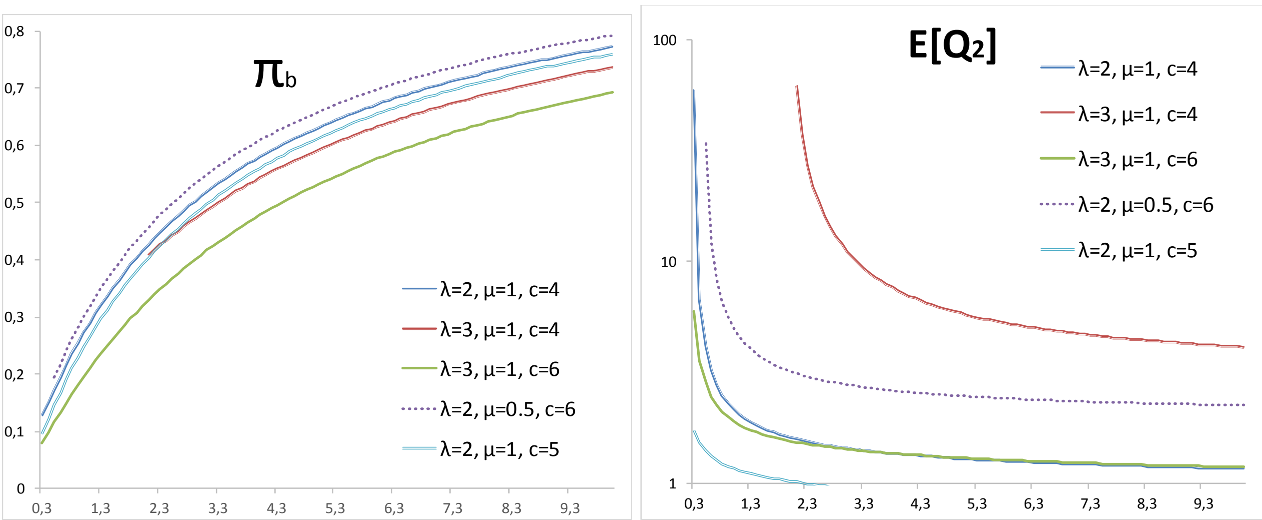
$$\pi_b = \sum_{j=0}^{\infty} \pi_{nj} = \frac{\nu / \lambda}{r-1} 1^T(n) u v^T C^{-1} e_1 H^{-1},$$

$$E[Q_2] = \sum_{j=0}^{\infty} j \sum_{i=0}^{n} \pi_{ij} = \frac{r+1}{(r-1)^2} 1^T(n) u v^T C^{-1} e_1 H^{-1}.$$

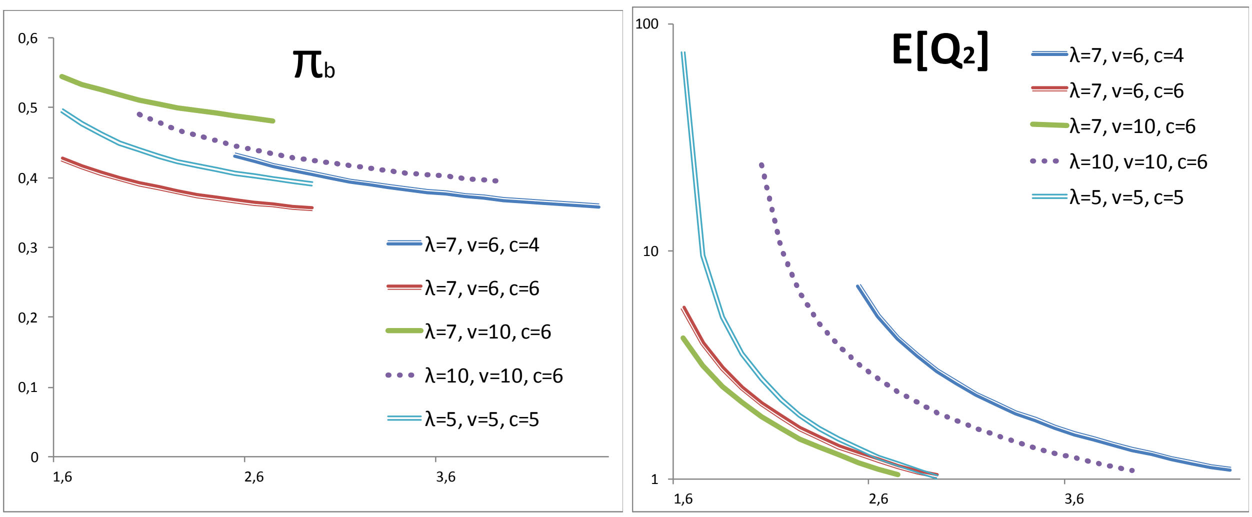
The effect of different parameters on blocking probability and the average number of calls in the orbit is shown graphically on Pictures 2-4.



Pic. 2. The blocking probability π_b and the average number of retrials $E[Q_2]$ vs. λ.



Pic. 3. The blocking probability π_b and the average number of retrials $E[Q_2]$ vs. v.



Pic. 4. The blocking probability π_b and the average number of retrials $E[Q_2]$ vs. μ.

Pictures 2-4 demonstrate blocking probability π_b and the average number of retrials *E[Q₂]* against the parameters of retrial queue with constant retrial rate. One can see that these characteristics can be significantly improved, if we are able to change or control some of the system's parameters.

3. OPTIMAL CONTROL IN A SET OF THRESHOLD STRATEGIES

Now we will consider the classical models with substitution

$$\lambda \to \lambda_j ,$$

where $j=0,1,\dots$ is a number of retrial calls. Infinitesimal rates of a Markov service process $Q(t)=(Q_1(t),Q_2(t))^T$ are given by the relations (2), (3) with a substitution λ_j for λ. In view of the fact that a rate of input flow dependents on a size of the retrial queue we will denote the model described above by the symbol $M_Q \mid M \mid n \mid \infty$.

In what follows we will assume that parameters of the $M_Q \mid M \mid n \mid \infty$-model are nondegenerate: $\mu > 0, \nu > 0, \lambda_j > 0,\ j = 0,1,\dots$.

Lemma 3. Let $\lambda = \overline{\lim_{j\to\infty}} \lambda_j < \infty$. Then under $\dfrac{\lambda}{n\mu} < 1$ the chain *Q(t)* is ergodic and its limit distribution is the same as the single stationary one.

Proof.

We will consider the following functions as Lyapunov test functions

$$\phi(i,j) = \alpha i + j, \quad (i,j) \in S,$$

where the α parameter will be defined later.

For the given test functions the average transfer

$$y_{ij} = \sum_{(i',j')\neq(i,j)} q_{(i,j)(i',j')} \left(\phi(i',j') - \phi(i,j)\right)$$

will be

$$y_{ij} = \begin{cases} \lambda_j \alpha - i\mu\alpha + j\nu(\alpha - 1),\ 0 \le i \le n-1, \\ \lambda_j - n\mu\alpha,\ i = n. \end{cases}$$

Under condition $\frac{\lambda}{n\mu} < 1$ for any $\alpha \in \left(\frac{\lambda}{n\mu}, 1\right)$ there exists such *ε>0*, so that $y_{ij}<-\varepsilon$ for all $(i, j) \in S$ except of finite number of states *(i,j)*. So the conditions of Tweedy theorem [7, p.97] are held for test functions $\phi(i, j) = \alpha i + j,\ \alpha \in \left(\frac{\lambda}{n\mu}, 1\right)$.

Lemma is proved.

For construction of calculating schemes and explicit formulas we will again use the finite $[M_Q \mid M \mid n \mid N]$–model in which the maximal size of retrial queue does not exceed the level *N*. In the phase points $\{0,1,...,n\} \times \{0,1,...,N\} \setminus \{(n,N)\}$ infinitesimal rates of the service process $Q(t,N) = (Q_1(t,N), Q_2(t,N))^T$ in the $[M_Q \mid M \mid n \mid N]$-queue are the same as the infinitesimal rates of $Q(t) = (Q_1(t), Q_2(t))^T$. In the phase point (n, N):

$$q^{(N)}_{(n,N)(i',j')} = \begin{cases} n\mu, & under\,(i', j') = (n-1, N); \\ -n\mu, & under\,(i', j') = (n, N); \\ 0, & otherwise. \end{cases}$$

By analogy with Section 2.2 for analysis of stationary regime we introduce matrices which are determined by the model parameters:

$A(j) = \left\| a_{ik}(j) \right\|_{i,k=1}^{n}$, is a matrix with entries $a_{ii-1}(j) = (j+1)\nu, \quad i = 1, 2, \ldots, n-1;$

$$a_{nk}(j) = \begin{cases} \dfrac{(j+1)\nu n\mu}{\lambda_j}, & k \neq n-1, \\ \dfrac{(j+1)\nu(\lambda_j + n\mu)}{\lambda_j}, & k = n-1, \end{cases}$$ and all other entries are equal to 0;

$B(j) = \left\| b_{ik}(j) \right\|_{i,k=1}^{n}$ is a three-diagonal matrix with entries $b_{ii-1}(j) = -\lambda_j, \quad i = 2,...,n;$ $b_{ii}(j) = \lambda_j + j\nu + (i-1)\mu, \quad i = 1,...,n;$ $b_{ii+1}(j) = -i\mu, \quad i = 1,...,n-1; \quad j = 0,1,\ldots,N-1;$

$C(N) = \left\| c_{ik}(N) \right\|_{i,k=1}^{n}$, where $(c_{11}(N), c_{12}(N), ..., c_{1n}(N)) = e_1^T = (1,0,...,0);$ and for $i = 2,...,n \quad (c_{i1}(N), c_{i2}(N), ..., c_{in}(N)) = (b_{i-11}(N), b_{i-12}(N), ..., b_{i-1n}(N)).$

In parallel with Lemma 2 the following proposition holds.

Lemma 4. Matrices $B(j),\ j = 0,1,...,$ and $C(N)$ are nonsingular.

A state set $S(N)$ of the Markov chain $Q(t,N)$ is finite: $S(N)=\{0,1,...,n\}\times\{0,1,...,N\}$. Therefore for $Q(t,N)$ there always exists a stationary regime and via $\pi_{ij}(N)$, $(i,j)\in S(N)$ we will designate its stationary probabilities.

For $\pi_{ij}(N)$ Kolmogorov equations may be solved in an explicit vector-matrix form.

Theorem 2. Let

$$\pi_j^T(N)=(\pi_{0j}(N),\pi_{1j}(N),...,\pi_{n-1j}(N)),\qquad \Delta_j(N)=\frac{\left(\prod_{i=j}^{N-1}B^{-1}(i)A(i)\right)C^{-1}(N)e_1}{e_1^T\left(\prod_{i=0}^{N-1}B^{-1}(i)A(i)\right)C^{-1}(N)e_1},$$

$j=0,1,...,N,$

where we use the commonly accepted agreement

$$\prod_{i=N}^{N-1}B^{-1}(i)A(i)=E.$$

Then

$$\pi_j(N)=\pi_{00}(N)\Delta_j(N),\qquad j=0,1,...,N, \tag{26}$$

$$\pi_{nj}(N)=\pi_{00}(N)\frac{(j+1)\nu}{\lambda_j}\overline{1}^T(n)\Delta_{j+1}(N),\ j=0,1,...,N-1, \tag{27}$$

$$\pi_{nN}(N)=\pi_{00}(N)\frac{1}{n\mu}(\lambda_N e_n^T+N\nu\overline{1}^T(n))\Delta_N(N), \tag{28}$$

and

$$\pi_{00}(N)=\left\{\overline{1}^T(n)\Delta_0(N)+\sum_{j=1}^{N}\left(1+\frac{j\nu}{\lambda_{j-1}}\right)\overline{1}^T(n)\Delta_j(N)+\right. \tag{29}$$

$$\left.+\frac{1}{n\mu}\left(\lambda_N e_n^T+N\nu\overline{1}^T(n)\right)\Delta_N(N)\right\}^{-1}.$$

Proof. For the $[M_Q\,|\,M\,|\,n\,|\,N]$-queue let us consider the Kolmogorov equations corresponding to the phase points $(i,j)\in\{0,1,...,n-1\}\times\{0,1,...,N-1\}$:

$$-\lambda_j\pi_{i-1j}(N)+(\lambda_j+i\mu+j\nu)\pi_{ij}(N)-(i+1)\mu\pi_{i+1j}(N)= \tag{30}$$

$$= (j+1)\nu\pi_{i-1\,j+1}(N).$$

By an agreement we set $\pi_{-1k}(N) = 0.$

We supplement to (30) the following equations

$$\lambda_j \pi_{nj}(N) = (j+1)\nu \sum_{i=0}^{n-1} \pi_{ij+1}(N), \qquad j = 0,\dots,N-1, \tag{31}$$

Which represent an equality of probability flows in stationary regime through a separation boundary of the phase set $S(N) = E(j,N) \cup \overline{E}(j,N)$, where $E(j,N) = \{(\alpha,\beta) \in S(N) : \beta \le j\}$ (see [17], Section II).

Taking into account the accepted notation the equations (30), (31) are in the vector-matrix form

$$B(j)\pi_j(N) = A(j)\pi_{j+1}(N) \qquad j = 0,\dots,N-1. \tag{32}$$

For the level $j = N$ we observe

$$-\lambda_N \pi_{i-2N}(N) + (\lambda_N + (i-1)\mu + N\nu)\pi_{i-1N}(N) - i\mu\pi_{iN}(N) = 0,$$

$$i = 1,\dots,n-1.$$

If we supplement to the last equations $\pi_{0N}(N) = \pi_{0N}(N)$ then as a result we the system of the following vector-matrix form

$$C(N)\pi_N(N) = \pi_{0N}(N)e_1. \tag{33}$$

From (32), (33) we find

$$\pi_j(N) = \pi_{0N}(N)\left(\prod_{i=j}^{N-1} B^{-1}(i)A(i)\right)C^{-1}(N)e_1, \qquad j = 0,1,\dots,N.$$

From the last formula under $j = 0$ it can be deduced

$$\pi_{00}(N) = \left\{ e_1^T \left(\prod_{i=0}^{N-1} B^{-1}(i)A(i)\right) C^{-1}(N)e_1 \right\}^{-1}.$$

Thus, (26) is proved.

The formula (27) follows from (26) and (31).

Let us consider the Kolmogorov equation for the phase point (n,N):

$$n\mu\pi_{nN}(N) = \lambda_N \pi_{n-1N}(N) + \lambda_{N-1}\pi_{nN-1}(N).$$

Now (28) is a consequence of (26), (31).

Obviously, (29) is a result of (26) - (28) and a normalization condition.

The theorem is proved.

This result gives a possibility to obtain a significant representation of the stationary probabilities for the $[M_Q \,|\, M \,|\, n \,|\, \infty]$- queue.

If the conditions of Lemma 3 are held then for the $[M_Q \,|\, M \,|\, n \,|\, \infty]$- queue there exists a stationary regime and via π_{ij}, $(i,j) \in S = \{0,1,\dots,n\} \times \{0,1,\dots\}$ we will write the stationary probabilities, $\pi_j^T = (\pi_{0j}, \pi_{1j}, \dots, \pi_{n-1\,j}), \quad j = 0,1,\dots.$

As before the process $Q(t)$ is a migration. Based on this fact and arguments from the proof of Lemma 5 we find that the vector $\dfrac{1}{\pi_{00}(N)} \pi_j(N)$ converges to $\dfrac{1}{\pi_{00}} \pi_j$ by components. From the convergence and from (26) we deduce an existence of a limit for the sequence $\Delta_j(N)$, as $N \to \infty$. We will denote the limit as $\Delta_j(M_Q \,|\, M \,|\, n \,|\, \infty)$. If there is not a confusion then we will omit a code of the queue

$$\Delta_j(M_Q \,|\, M \,|\, n \,|\, \infty) = \Delta_j, \qquad j = 0,1,\dots.$$

Components of the limit vector Δ_j may be numerically calculated with the use of the formula (25).

On this basis, from Theorem 2 we obtain the following result which is true for the $[M_Q \,|\, M \,|\, n \,|\, \infty]$- queue.

Theorem 3. If $Q(t)$ meets the conditions of Lemma 3 then

$$\pi_j = \pi_{00} \Delta_j, \qquad \pi_{nj} = \pi_{00} \frac{(j+1)\nu}{\lambda_j} \overline{1}^T(n) \Delta_{j+1}, \qquad j = 0,1,\dots, \tag{34}$$

where

$$\pi_{00} = \left\{ \overline{1}^T(n) \Delta_0 + \sum_{j=1}^{\infty} \left(1 + \frac{j\nu}{\lambda_{j-1}} \right) \overline{1}^T(n) \Delta_j \right\}^{-1}. \tag{35}$$

In the case of one and two servers the formulas from Theorem 3 transform in explicit ones of scalar type.

Corollary 3. Let for the $[M_Q \,|\, M\,|1|\,\infty]$-queue the conditions of Lemma 3 hold. Then a stationary regime exists and the stationary probabilities take the form:

$$\pi_{0j} = \pi_{00} \prod_{i=1}^{j} \rho_{i-1} \left[1 + \frac{1}{i} \left(\lambda_{i-1} / \nu - 1 \right) \right], \tag{36}$$

$$\pi_{1j} = \pi_{00} \frac{j+1}{\lambda_j / \nu} \prod_{i=1}^{j+1} \rho_{i-1} \left[1 + \frac{1}{i} \left(\lambda_{i-1} / \nu - 1 \right) \right], \qquad j = 0,1,...,$$

$$\pi_{00} = \left\{ 1 + \sum_{j=1}^{\infty} \left(1 + \frac{j}{\lambda_{j-1} / \nu} \right) \prod_{i=1}^{j+1} \rho_{i-1} \left[1 + \frac{1}{i} \left(\lambda_{i-1} / \nu - 1 \right) \right] \right\}^{-1}, \tag{37}$$

where $\rho_i = \lambda_i / \mu$ is a queue load provided that a number of retrial calls is equal to “i”.

Under $n = 1$ all matrices from the representation of $\Delta_j(N)$ have the dimension 1, moreover

$$A(j) = \frac{(j+1)\nu}{\rho_j}, \qquad B(j) = \lambda_j + j\nu, \qquad C(j) = 1, \qquad j = 0,1,....$$

From here we find

$$\Delta_j(N) = \Delta_j = \prod_{i=1}^{j} \rho_{i-1} \left[1 + \frac{1}{i} \left(\lambda_{i-1} / \nu - 1 \right) \right]$$

and the formulas (36), (37) are a special case of (34), (35).

Now let us consider two-channel queues.

Recall that in Section 2.1 we have studied a more simple two-channel model with $\lambda_j \equiv \lambda, \quad j = 0,1,...,$ and obtained generating functions of the stationary distribution in terms of the hypergeometric functions in solving of a differential equation of the second order.

Corollary 4. Let for the $\left[M_Q \,|\, M \,|\, 2 \,|\, \infty \right]$ - queue the conditions of Lemma 3 hold. Then a stationary regime exists and the stationary probabilities take the form:

$$\pi_{0j} = \pi_{00} \cdot \frac{\lambda_0^2}{\left(\lambda_j + j\nu \right)^2 + j\nu\mu} \cdot \delta_j, \qquad \pi_{1j} = \pi_{00} \cdot \frac{\lambda_0^2}{\mu} \cdot \frac{\lambda_0^2}{\left(\lambda_j + j\nu \right)^2 + j\nu\mu} \cdot \delta_j,$$

$$\pi_{2j} = \pi_{00} \cdot \frac{\lambda_0^2}{\mu} \cdot \frac{(j+1)\nu}{\lambda_j} \cdot \frac{\mu + \lambda_{j+1} + (j+1)\nu}{\left(\lambda_{j+1} + (j+1)\nu \right)^2 + (j+1)\nu\mu} \cdot \delta_{j+1}, \qquad j = 0,1,..., \tag{38}$$

where

$$\pi_{00} = \left\{ 1 + \frac{\lambda_0}{\mu} + \frac{\lambda_0^2}{\mu} \sum_{j=1}^{\infty} \left(1 + \frac{j\nu}{\lambda_{j-1}} \right) \frac{\mu + \lambda_j + j\nu}{\left(\lambda_j + j\nu\right)^2 + j\nu\mu} \delta_j \right\}^{-1}, \tag{39}$$

$$\delta_j = \prod_{i=1}^{j} \rho_{i-1} \cdot \frac{\left(\lambda_i + i\nu\right)^2 + i\nu\mu}{i\nu\left(\lambda_i + i\nu + \mu(1+\rho_{i-1})\right)}, \qquad j = 0,1,\ldots,$$

$\rho_i = \dfrac{\lambda_i}{2\mu}$ is a load for the $\left[M_Q \mid M \mid 2 \mid \infty\right]$- queue.

Proof. For $n = 2$

$$A(j) = \frac{(j+1)\nu}{\rho_j} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1+\rho_j & 1 \end{pmatrix}, \qquad B(j) = \begin{pmatrix} \lambda_j + j\nu & -\mu \\ -\lambda_j & \lambda_j + j\nu + \mu \end{pmatrix},$$

$$B^{-1}(j) = \frac{1}{\left(\lambda_j + j\nu\right)^2 + j\nu\mu} \begin{pmatrix} \lambda_j + j\nu + \mu & \mu \\ \lambda_j & \lambda_j + j\nu \end{pmatrix}, \qquad j = 0,1,\ldots,$$

$$C(N) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda_N + N\nu & -\mu \end{pmatrix}, \qquad C^{-1}(N) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{\mu}(\lambda_N + N\nu) & -\frac{1}{\mu} \end{pmatrix}.$$

It is not difficult to calculate that

$$A(i-1)B^{-1}(i) = \frac{i\nu}{\rho_{i-1}} \cdot \frac{1}{\left(\lambda_i + i\nu\right)^2 + i\nu\mu} \times$$

$$\times \Pi(\lambda_i + (\lambda_i + i\nu\mu)(1+\rho_{i-1}), \mu(1+\rho_{i-1}) + \lambda_i + i\nu),$$

where $\Pi(a,b) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & b \end{pmatrix}$.

Starting from $\Pi(a_1,b_1) \cdot \Pi(a_2,b_2) = b_1 \Pi(a_2,b_2)$ we find

$$\left[\prod_{i=j}^{N-1} B^{-1}(i) A(i) \right] C^{-1}(N) e_1 = B^{-1}(j) \left[\prod_{i=j+1}^{N-1} A(i-1) B^{-1}(i) \right] A(N-1) C^{-1}(N) e_1 =$$

$$= \frac{1}{\mu} \cdot \frac{\left(\lambda_N + N\nu\right)^2 + N\nu\mu}{\left(\lambda_j + j\nu\right)^2 + j\nu\mu} \cdot \left\{ \prod_{i=j+1}^{N} \frac{1}{\rho_{i-1}} \cdot \frac{i\nu\left[\lambda_i + i\nu + \mu(1+\rho_{i-1})\right]}{\left(\lambda_i + i\nu\right)^2 + i\nu\mu} \right\} \begin{pmatrix} \mu \\ \lambda_j + j\nu \end{pmatrix}$$

and

$$e_1^T\left[\prod_{i=0}^{N-1}B^{-1}(i)A(i)\right]C^{-1}(N)e_1=$$

$$=\frac{1}{\lambda_0^2}\cdot\left[\left(\lambda_N+N\nu\right)^2+N\nu\mu\right]\cdot\prod_{i=1}^{N}\frac{1}{\rho_{i-1}}\cdot\frac{i\nu\left[\lambda_i+i\nu+\mu(1+\rho_{i-1})\right]}{\left(\lambda_i+i\nu\right)^2+i\nu\mu}.$$

From the last two relations we derive

$$\Delta_j(N)=\Delta_j= \tag{40}$$

$$=\frac{\lambda_0^2}{\mu}\cdot\frac{1}{\left(\lambda_j+j\nu\right)^2+j\nu\mu}\cdot\left\{\prod_{i=1}^{j}\rho_{i-1}\cdot\frac{\left(\lambda_i+i\nu\right)^2+i\nu\mu}{i\nu\left[\lambda_i+i\nu+\mu(1+\rho_{i-1})\right]}\right\}\left(\frac{\mu}{\lambda_j+j\nu}\right).$$

Substituting Δ_j in the form (40) in (34), (35) we arrive at the formulas (38), (39). The corollary is proved.

On the based of the obtained results we discuss an optimization problem of income dealt with the system functioning. This problem is considered in a set of threshold strategies which switch an rate of input flow.

A many-threshold strategy is given by thresholds $0=H_0\le H_1\le\ldots\le H_{M-1}<H_M=\infty,\ H'=\left(H_1,H_2,\ldots,H_{M-1}\right),\ M$ is a fixed number. If in $t\ge 0$ moment of time the number of retrial calls $Q_2(t)\in\left[H_{i-1},H_i\right),\ i=1,\ldots,M$ then the retrial queue operates in the i-th regime and the rate of input flow is equal to h_i. Others parameters do not depend on the regime of operation.

Choice of a threshold strategy H means the fixing of dependence λ_j on the number of retrial calls: $\lambda_j=h_i,\ j\in\left[H_{i-1},H_i\right),\ i=1,\ldots,M$.

Income optimization problem consists in search of the threshold H for which

$$W(H)=C_1S_1(H)-C_2S_2(H)-C_3S_3(H)\to\max,$$

$$0=H_0\le H_1\le\ldots\le H_{M-1}<H_M=\infty,\ H_i\in\{0,1,\ldots\},\ i=1,2,\ldots,M-1,$$

where

$S_1(t,H)$ is the number of calls served to “t” moment of time;

$S_2(t,H)$ is the number of calls which were rejected and transformed in retrial calls;

$S_3(t,H)$ is the number of switchings of the input flow rate;

$S_i(H) = \lim_{t\to\infty} t^{-1} S_i(t, H)$, $i = 1, 2, 3$, if this limit exists;

C_1 is the income relating to service of a call;

C_2 is the penalty relating to service failure;

C_3 is the penalty relating to switching of input flow rate.

Similar optimization problems for the single-channel systems with repeated calls were considered in [15], [16].

Under conditions of Lemma 3 the limit functionals $S_i(H), i = 1, 2, 3$, also exists and may be written via the stationary probabilities $\pi_{ij}, (i, j) \in I \times J$,

$$S_1(H) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{n} i\mu\pi_{ij}(H), \qquad S_2(H) = \sum_{i=1}^{M} h_i \sum_{j=H_{i-1}}^{H_i - 1} \pi_{nj}(H),$$

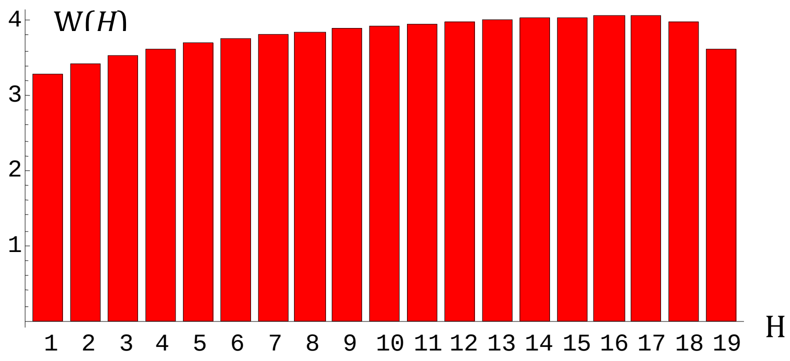
$$S_3(H) = \sum_{i=1}^{M-1} \left(h_i \pi_{nH_i - 1}(H) + \nu H_i \sum_{k=0}^{n-1} \pi_{kH_i} \right).$$

It together with the result of Theorem 2 give us an algorithm to solve the formulated optimization problem.

It is shown the calculating examples of stationary distribution for particular queues and solution of optimization problems. All calculations are realized in the packet MATHEMATICA 5.1.

We consider the case of the system $M_Q / M / 2 / 20$ and take its parameters as follows: $h_1 = 2.5$; $h_2 = 0.5$; $\mu = 1$; $\nu = 0.1$ Let $C_1 = 6$, $C_2 = 2$, $C_3 = 4$ be values of coefficients of cost.

The program written on the basis of the formulas obtained above and proposed algorithms allowed to obtain the following graphics for objective function.



Calculation gives the following values:

$W(1)=3.29487; W(2)=3.42729; W(3)=3.53285; W(4)=3.61861;$
$W(5)=3.68956; W(6)=3.74924; W(7)=3.80022; W(8)=3.84437;$
$W(9)=3.88309; W(10)=3.91744; W(11)=3.94823; W(12)=3.97605;$
$W(13)=4.00132; W(14)=4.02418; W(15)=4.04396; W(16)=4.05742;$
$W(17)=4.05189; W(18)=3.97815; W(19)=3.61672.$

The maximum value of objective function is 4.05742 and it is achieved at the value of threshold H = 16.

4. RETRIAL QUEUES CONTROLLED BY HYSTERESIS STRATEGIES

Control on the base of hysteresis strategy may be described in the following way.

Let $H_1 \le H_2$ are two natural numbers which represent a lower and upper thresholds. If the number of retrial calls $j \le H_1 - 1$ then the queue operates in the first regime and the rate of input flow is equal to h_1. If $j \ge H_2$ then the queue operates in the second regime with the rate of input flow h_2. If $H_1 \le j < H_2$ then the queue remains such regime in which the queue operated until input moment in this area.

A set of one-threshold strategies is subset of hysteresis ones under $H_1 = H_2$.

A service process is simulated by a three-dimensional Markov process $Q(t) = \left(Q_1(t), Q_2(t), Q_3(t)\right)'$ with continuous time in phase set

$$S = S^{(1)} \cup S^{(2)}, \quad S^{(1)} \cap S^{(2)} = \varnothing,$$

where

$$S^{(1)} = \left\{(i, j, 1) : i = 0,1,...,n,\ j = 0,1,...,H_2 - 1\right\},$$

$$S^{(2)} = \left\{(i, j, 2) : i = 0,1,...,n,\ j = H_1,...\right\}.$$

$Q_1(t)$ is the number of occupied servers in the t moment of time; $Q_2(t)$ is the number of retrial calls; $Q_3(t)$ is the regime number in the t moment of time.

Local characteristics $q_{(i',j',r')}^{(i,j,r)}$ of the process $Q(t)$ are defined in the following way:

1. if $\left(i = 0,...,n-1,\ j = 0,1,...,H_2 - 1,\ r = 1\right) \vee$

$\left(i=0,\ldots,n-1,\ j=H_1+1,\ldots,\ r=2\right)$ then

$$q_{(i',j',r')}^{(i,j,r)}=\begin{cases} h_r, & \text{under } (i',j',r')=(i+1,j,r),\\ i\mu, & \text{under } (i',j',r')=(i-1,j,r),\\ j\nu, & \text{under } (i',j',r')=(i+1,j-1,r),\\ -\left(h_r+i\mu+j\nu\right), & \text{under } (i',j',r')=(i,j,r),\\ 0, & \text{otherwise;} \end{cases}$$

2. if $\left(i=n,\ j=0,1,\ldots,H_2-2,\ r=1\right)\vee$

$\left(i=n,\ j=H_1+1,\ldots,\ r=2\right)$ then

$$q_{(i',j',r')}^{(n,j,r)}=\begin{cases} h_r, \text{ under } (i',j',r')=(n,j+1,r),\\ n\mu, \text{ under } (i',j',r')=(n-1,j,r),\\ -\left(h_r+n\mu\right), \text{ under } (i',j',r')=(n,j,r),\\ 0, \text{ otherwise;} \end{cases}$$

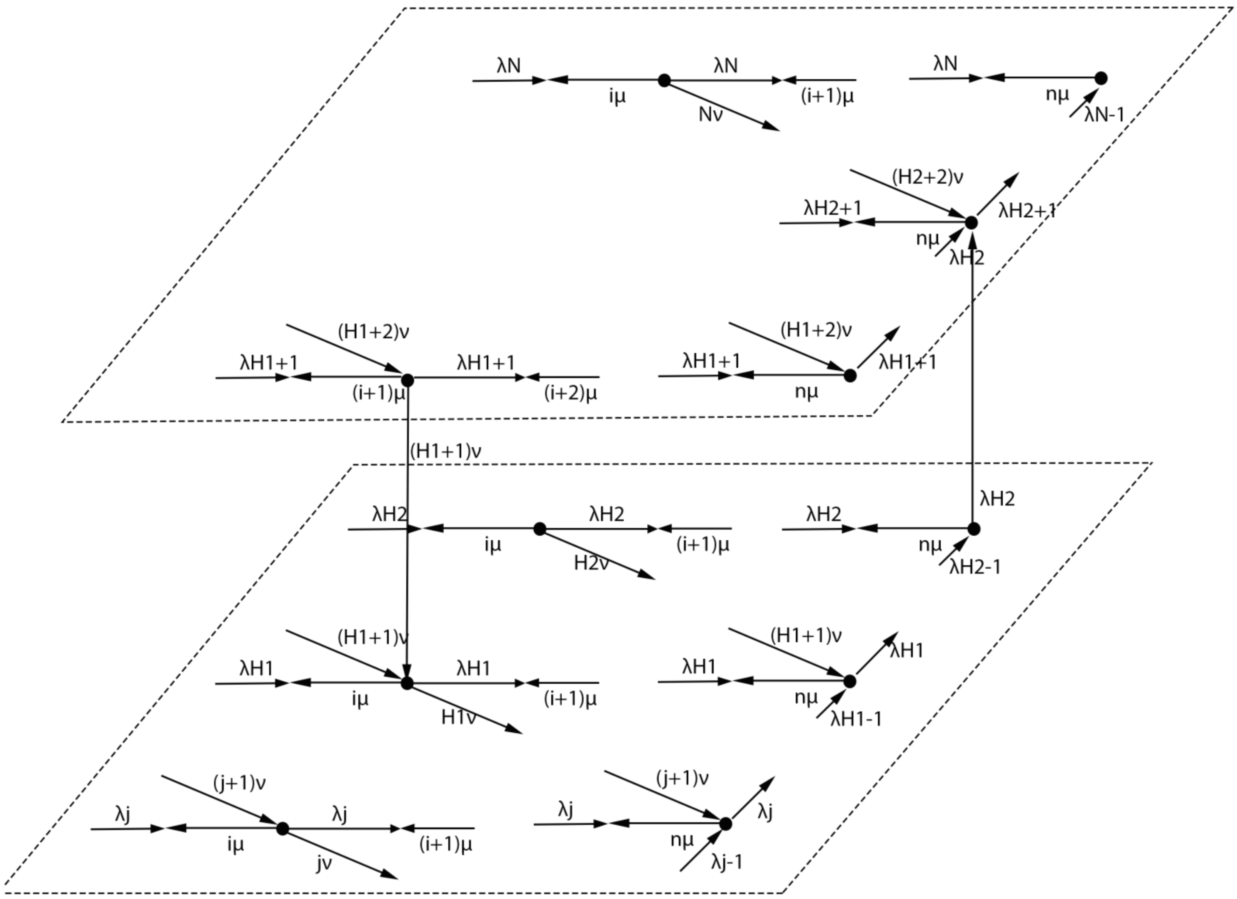
3. if $i=n,\ j=H_2-1,\ r=1$, then

$$q_{(i',j',r')}^{(n,H_2-1,1)}=\begin{cases} h_1, \text{ under } (i',j',r')=(n,H_2,2),\\ n\mu, \text{ under } (i',j',r')=(n-1,H_2-1,1),\\ -\left(h_1+n\mu\right), \text{ under } (i',j',r')=(n,H_2-1,1),\\ 0, \text{ otherwise;} \end{cases}$$

4. if $i=0,\ldots,n-1,\ j=H_1,\ r=2$, then

$$q_{(i',j',r')}^{(i,H_1,2)}=\begin{cases} h_2, & \text{under } (i',j',r')=(i+1,H_1,2),\\ i\mu, & \text{under } (i',j',r')=(i-1,H_1,2),\\ H_1\nu, & \text{under } (i',j',r')=(i+1,H_1-1,1),\\ -\left(h_2+i\mu+H_1\nu\right), & \text{under } (i',j',r')=(i,H_1,2),\\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

The diagram of transitions between states is shown in the following figure.



Conditions of stationary regime existence for the process $Q(t), t \geq 0$ are in the following.

Lemma 4. Under $h_2 / n\mu < 1$ an ergodic distribution of the process $Q(t)$ exists and is the same as single stationary one.

If from the phase set $S = S^{(1)} \cup S^{(2)}$ we eliminate the finite number of points

$$\{(i, j, r) : i = 0,1,...,n;\ j = 0,1,...,H_2; r = 1,2\}$$

then for the residual part of S and the Lyapunov test functions from Lemma 3 the conditions of Tweedy theorem are held. It proves a conclusion of the lemma.

To construct calculating schemes and explicit formulas we consider the truncated $M_Q / M / n / N$ - queue with a finite number N retrial calls. The $[M_Q \mid M \mid n \mid N]$ - queue approximates an initial model provided that $N \to \infty$. Therefore, to eliminate details unrelated to the heart of the matter we will always assume that $N > H_2$.

Local characteristics $q_{(i',j',r')}^{(i,j,r)}(N)$, $(i,j,r),(i',j',r')\in S(N)$, $S(N)=S^{(1)}(N)\cup S^{(2)}(N),\ S^{(1)}(N)=S^{(1)},\ S^{(2)}(N)=\{(i,j,2): i=0,1,...,n; H_1\le j\le N\}$ of the queue are the same as the above excepting the case $i=n,\ j=N,\ r=2$

$$q_{(i',j',r')}^{(n,N,2)}(N)=\begin{cases} n\mu, \text{ under } (i',j',r')=(n-1,N,2),\\ -n\mu, \text{ under } (i',j',r')=(n,N,2),\\ 0, \qquad\qquad \text{otherwise.}\end{cases}$$

For the $M_Q/M/n/N$ - queue a stationary distribution always exists and we will denote it by

$$\pi_{ij}^{(r)}(N)=\lim_{t\to\infty}P\big(Q_1(t)=i,Q_2(t)=j,Q_3(t)=r\big),\qquad (i,j,r)\in S(N).$$

Let us find the stationary probabilities $\pi_{ij}^{(r)}(N)$.

We introduce the notations:

$$\pi_j^{(r)}(N)=\left(\pi_{0j}^{(r)}(N),...,\pi_{n-1j}^{(r)}(N)\right)^T,$$

$A^{(r)}(j)=\left\|a_{ik}^{(r)}(j)\right\|_{i,k=1}^{n}$, is a matrix with entries $a_{ii-1}^{(r)}(j)=(j+1)\nu$, $i=2,...,n-1$;

$$a_{nk}^{(r)}(j)=\begin{cases}\dfrac{(j+1)\nu n\mu}{h_r}, & k\ne n-1,\\ \dfrac{(j+1)\nu(h_r+n\mu)}{h_r}, & k=n-1,\end{cases}$$

and all other entries are equal to 0;

$B^{(r)}(j)=\left\|b_{ik}^{(r)}(j)\right\|_{i,k=1}^{n}$ is a three-diagonal matrix with entries $b_{ii-1}^{(r)}(j)=-h_r$, $i=2,...,n$; $b_{ii}^{(r)}(j)=h_r+j\nu+(i-1)\mu$, $i=1,2,...,n$; $b_{ii+1}^{(r)}(j)=-i\mu$, $i=1,...,n-1$;

$\left[B^{(r)}(j)\right]^{-1}=\overline{B}^{(r)}(j)$ (for the sake of reduction of long formulas);

$j=0,1,...,N-1$;

$C(N)=\left\|c_{ik}(N)\right\|_{i,k=1}^{n}$, where $(c_{11}(N),c_{12}(N),...,c_{1n}(N))=e_1^T=(1,0,...,0)$; and for

$i=2,...,n$ $\quad (c_{i1}(N),c_{i2}(N),...,c_{in}(N))=(b_{i-1i}^{(2)}(N),b_{i-12}^{(2)}(N),...,b_{i-1n}^{(2)}(N))$;

$$D^{(r)} = \left\| d_{ik}^{(r)} \right\|_{i,k=1}^{n},\ d_{ik}^{(r)} = \begin{cases} \dfrac{H_1 \nu n \mu}{h_r}, & i = n, \quad k = 1,2,\dots,n; \\ 0, & \text{otherwise}; \end{cases}$$

$$F^{(1)}(j) = \begin{cases} \left(\prod_{i=j}^{H_1-1} \overline{B}^{(1)}(i) A^{(1)}(i) \right) \left[E + \sum_{k=H_1}^{H_2-1} \left(\prod_{i=j}^{k-1} \overline{B}^{(1)}(i) A^{(1)}(i) \right) \overline{B}^{(1)}(k) D^{(1)} \right], & j = 0,1,\dots,H_1, \\ \sum_{k=j}^{H_2-1} \left(\prod_{i=j}^{k-1} \overline{B}^{(1)}(i) A^{(1)}(i) \right) \overline{B}^{(1)}(k) D^{(1)}, \quad j = H_1,\dots,H_2-1; \end{cases}$$

$$F^{(2)}(j, N-1) = \left\{ E - \left[\sum_{k=j}^{H_2-1} \left(\prod_{i=j}^{k-1} \overline{B}^{(2)}(i) A^{(2)}(i) \right) \overline{B}^{(2)}(k) D^{(2)} \right] \times \right.$$

$$\left. \times \left[E + \sum_{k=H_1}^{H_2-1} \left(\prod_{i=H_1}^{k-1} \overline{B}^{(2)}(i) A^{(2)}(i) \right) \overline{B}^{(2)}(k) D^{(2)} \right]^{-1} \left(\prod_{i=H_1}^{j-1} \overline{B}^{(2)}(i) A^{(2)}(i) \right) \right\} \times$$

$$\times \prod_{i=j}^{N-1} \overline{B}^{(2)}(i) A^{(2)}(i), \qquad j = H_1,\dots,N-1.$$

By convention $\sum_{i=k}^{m} \dots$ is equal to the null-matrix under $k > m$.

$$F^{(2)}(j,N) = F^{(2)}(j,N-1) C^{-1}(N), \qquad j = H_1,\dots,N-1,$$

$$\Delta_j^{(1)}(N) = \frac{F^{(1)}(j) F^{(2)}(H_1,N) e_1}{e_1^T F^{(1)}(0) F^{(2)}(H_1,N) e_1}, \qquad j = 0,1,\dots,H_2-1,$$

$$\Delta_j^{(2)}(N) = \frac{F^{(2)}(j,N) e_1}{e_1^T F^{(1)}(0) F^{(2)}(H_1,N) e_1}, \qquad j = H_1,\dots,N.$$

We also set

$$\chi_m(j) = \begin{cases} 1, & j \le m, \\ 0, & \text{otherwise}, \end{cases} \qquad \overline{\chi}_m(j) = 1 - \chi_m(j).$$

Theorem 3. If $h_1, h_2 > 0$ then for any $N > H_2$ the following formulas for stationary probabilities hold true:

$$\pi_j^{(1)}(N) = \pi_{00}^{(1)}(N) \Delta_j^{(1)}(N), \qquad j = 0,1,\dots,H_2-1; \tag{41}$$

$$\pi_j^{(2)}(N) = \pi_{00}^{(1)}(N) \Delta_j^{(2)}(N), \qquad j = H_1,\dots,N; \tag{42}$$

$$\pi_{nj}^{(1)}(N)=\pi_{00}^{(1)}(N)\left[\frac{(j+1)\nu}{h_1}\overline{1}^T(n)\Delta_{j+1}^{(1)}(N)\chi_{H_2-2}(j)+\frac{H_1\nu}{h_1}\overline{1}^T(n)\Delta_{H_1}^{(2)}(N)\overline{\chi}_{H_1-2}(j)\right],$$

$$j=0,1,\ldots,H_2-1; \tag{43}$$

$$\pi_{nj}^{(2)}(N)=\pi_{00}^{(1)}(N)\left[\frac{(j+1)\nu}{h_2}\overline{1}^T(n)\Delta_{j+1}^{(2)}(N)-\frac{H_1\nu}{h_2}\overline{1}^T(n)\Delta_{H_1}^{(2)}(N)\chi_{H_2-1}(j)\right],$$

$$j=H_1,\ldots,N-1; \tag{44}$$

$$\pi_{nN}^{(2)}(N)=\pi_{00}^{(1)}(N)\frac{\left([h_2+(n-1)\mu+N\nu]e_{n-1}^T-h_2e_{n-2}^T\right)\Delta_N^{(2)}(N)}{n\mu}, \tag{45}$$

and

$$\pi_{00}^{(1)}(N)=\left\{\sum_{j=0}^{H_2-1}\overline{1}^T(n)\left(\Delta_j^{(1)}(N)+\frac{(j+1)\nu}{h_1}\Delta_{j+1}^{(1)}(N)\chi_{H_2-2}(j)+\frac{H_1\nu}{h_1}\Delta_{H_1}^{(2)}(N)\overline{\chi}_{H_1-2}(j)\right)+\right.$$

$$\sum_{j=H_1}^{N-1}\overline{1}^T(n)\left(\Delta_j^{(2)}(N)+\frac{(j+1)\nu}{h_2}\Delta_{j+1}^{(2)}(N)-\frac{H_1\nu}{h_2}\Delta_{H_1}^{(2)}(N)\chi_{H_2-1}(j)\right)+ \tag{46}$$

$$\left.+\overline{1}^T(n)\Delta_N^{(2)}(N)+\frac{1}{n\mu}\left([h_2+(n-1)\mu+N\mu]e_{n-1}^T-h_2e_{n-2}^T\right)\Delta_N^{(2)}(N)\right\}^{-1}.$$

Proof. In the act of finding of the probabilities $\pi_{ij}^{(r)}(N)$ we use the equality of probability flows through a separation boundary of the phase set into two subsets in the steady state. For each $j=0,1,\ldots,H_2-1$ we divide the phase set into two subsets $S(N)=S_j^{(1)}(N)\cup\overline{S}_j^{(1)}(N)$, where $S_j^{(1)}(N)=\{(i_1,i_2,1):i_1=0,1,\ldots,n;i_2\le j\}$. Equating probability flows through the separation boundary we obtain:

$$h_1\pi_{nj}^{(1)}(N)=(j+1)\nu\sum_{i=0}^{n-1}\pi_{ij+1}^{(1)}(N),\qquad j=0,\ldots,H_1-2, \tag{47}$$

$$h_1\pi_{nj}^{(1)}(N)=(j+1)\nu\sum_{i=0}^{n-1}\pi_{ij+1}^{(1)}(N)+H_1\nu\sum_{i=0}^{n-1}\pi_{iH_1}^{(2)}(N), \tag{48}$$

$$j=H_1-1,\ldots,H_2-2,$$

$$h_1\pi_{nH_2-1}^{(1)}(N)=H_1\nu\sum_{i=0}^{n-1}\pi_{iH_1}^{(2)}(N),\qquad j=H_2-1. \tag{49}$$

For each $j = H_1,...,N-1$ we consider the decomposition of the phase set $S(N) = S_j^{(2)}(N) \cup \overline{S}_j^{(2)}(N)$, where $S_j^{(2)}(N) = \{(i_1, i_2, 2) : i_1 = 0,1,...,n; H_1 \le i_2 \le j\}$. Equating probability flows through the separation boundary we arrive at the following set of equations:

$$h_2\pi_{nj}^{(2)}(N) + H_1\nu\sum_{i=0}^{n-1}\pi_{iH_1}^{(2)}(N) = (j+1)\nu\sum_{i=0}^{n-1}\pi_{ij+1}^{(2)}(N), \tag{50}$$

$$j = H_1,...,H_2-1,$$

$$h_2\pi_{nj}^{(2)}(N) + H_1\nu\sum_{i=0}^{n-1}\pi_{iH_1}^{(2)}(N) = (j+1)\nu\sum_{i=0}^{n-1}\pi_{ij+1}^{(2)}(N) + h_1\pi_{nH_2-1}^{(1)}(N), \tag{51}$$

$$j = H_2,...,N-1.$$

Now for the phase points $(i, j, 1)$, $i = 0,1,...,n-1$, $j = 0,1,...,H_2-1$, we write the Kolmogorov equations:

$$[h_1 + i\mu + j\nu]\pi_{ij}^{(1)}(N) = h_1\pi_{i-1j}^{(1)}(N) + (i+1)\mu\pi_{i+1j}^{(1)}(N) + (j+1)\nu\pi_{i-1j+1}^{(1)}(N), \tag{52}$$

$$i = 0,1,...,n-1, \quad j = 0,...,H_2-2, \quad j \ne H_1-1;$$

$$[h_1 + i\mu + (H_2-1)\nu]\pi_{iH_2-1}^{(1)}(N) = h_1\pi_{i-1H_2-1}^{(1)}(N) + (i+1)\mu\pi_{i+1H_2-1}^{(1)}(N), \tag{53}$$

$$i = 0,1,...,n-1, \quad j = H_2-1;$$

$$[h_1 + i\mu + (H_1-1)\nu]\pi_{iH_1-1}^{(1)}(N) = h_1\pi_{i-1H_1-1}^{(1)}(N) + (i+1)\mu\pi_{i+1H_1-1}^{(1)}(N) +$$

$$+H_1\nu\pi_{i-1H_1}^{(1)}(N) + H_1\nu\pi_{i-1H_1}^{(2)}(N), \tag{54}$$

$$i = 0,1,...,n-1, \quad j = H_1-1.$$

In a similar manner for the phase points $(i, j, 2)$, $i = 0,1,...,n-1$, $j = H_1,...,N$, we find:

$$[h_2 + i\mu + j\nu]\pi_{ij}^{(2)}(N) = h_2\pi_{i-1j}^{(2)}(N) + (i+1)\mu\pi_{i+1j}^{(2)}(N) + (j+1)\nu\pi_{i-1j+1}^{(2)}(N), \tag{55}$$

$$i = 0,1,...,n-1, \quad j = H_1,...,N-1;$$

$$[h_2 + i\mu + N\nu]\pi_{iN}^{(2)}(N) = h_2\pi_{i-1N}^{(2)}(N) + (i+1)\mu\pi_{i+1N}^{(2)}(N), \tag{56}$$

$$i = 0,1,...,n-1, \quad j = N.$$

Reducing the equation (51) with use (49), we obtain

$$\pi_{nj}^{(2)}(N) = \frac{(j+1)\nu}{h_2} \overline{1}^T(n)\pi_{j+1}^{(2)}(N), \qquad j = H_2, ..., N-1.$$

Let us substitute the last expression in (55) for $j = H_2, ..., N-1$ and write the result in a vector-matrix form

$$B^{(2)}(j)\pi_j^{(2)}(N) = A^{(2)}(j)\pi_{j+1}^{(2)}(N), \qquad j = H_2, ..., N-1.$$

It follows that

$$\pi_j^{(2)}(N) = \left(\prod_{i=j}^{N-1} \overline{B}^{(2)}(i)A^{(2)}(i) \right) \pi_N^{(2)}(N), \qquad j = H_2, ..., N-1. \tag{57}$$

Let us rewrite (50) in the following form:

$$\pi_{nj}^{(2)}(N) = \frac{(j+1)\nu}{h_2} \overline{1}^T(n)\pi_{j+1}^{(2)}(N) - \frac{H_1\nu}{h_2} \overline{1}^T(n)\pi_{H_1}^{(2)}(N),$$

$$j = H_1, ..., H_2 - 1.$$

Using the representation of $\pi_{nj}^{(2)}(N)$ we write the system (55) as

$$B^{(2)}(j)\pi_j^{(2)}(N) = A^{(2)}(j)\pi_{j+1}^{(2)}(N) - D^{(2)}\pi_{H_1}^{(2)}(N), \qquad j = H_1, ..., H_2 - 1.$$

From here we obtain

$$\pi_j^{(2)}(N) = \left(\prod_{i=j}^{N-1} \overline{B}^{(2)}(i)A^{(2)}(i) \right) \pi_N^{(2)}(N) - \left[\sum_{k=j}^{H_2-1} \left(\prod_{i=j}^{k-1} \overline{B}^{(2)}(i)A^{(2)}(i) \right) \overline{B}^{(2)}(k)D^{(2)} \right] \pi_{H_1}^{(2)}(N),$$

$$j = H_1, ..., H_2 - 1.$$

From the last expression under $j = H_1$ we find $\pi_{H_1}^{(2)}(N)$

$$\pi_{H_1}^{(2)}(N) = \left[E + \sum_{k=H_1}^{H_2-1} \left(\prod_{i=H_1}^{k-1} \overline{B}^{(2)}(i)A^{(2)}(i) \right) \overline{B}^{(2)}(k)D^{(2)} \right]^{-1} \cdot \left(\prod_{i=H_1}^{N-1} \overline{B}^{(2)}(i)A^{(2)}(i) \right) \pi_N^{(2)}(N).$$

Thus, we arrive at the formula

$$\pi_j^{(2)}(N) = \left\{ E - \left[\sum_{k=j}^{H_2-1} \left(\prod_{i=j}^{k-1} \overline{B}^{(2)}(i)A^{(2)}(i) \right) \overline{B}^{(2)}(k)D^{(2)} \right] \times \right. \tag{58}$$

$$\times\left[E+\sum_{k=H_1}^{H_2-1}\left(\prod_{i=H_1}^{k-1}\overline{B}^{(2)}(i)A^{(2)}(i)\right)\overline{B}^{(2)}(k)D^{(2)}\right]^{-1}\left(\prod_{i=H_1}^{j-1}\overline{B}^{(2)}(i)A^{(2)}(i)\right)\Bigg\}\times$$

$$\times\left(\prod_{i=j}^{N-1}\overline{B}^{(2)}(i)A^{(2)}(i)\right)\pi_N^{(2)}(N),$$

$$j=H_1,...,H_2-1.$$

Combining the equations (57) and (58) we obtain

$$\pi_j^{(2)}(N)=F^{(2)}(j,N-1)\pi_N^{(2)}(N), \qquad j=H_1,...,N-1. \tag{59}$$

The equations (52) for $j=H_1,...,H_2-2$ and (53) are converted into

$$B^{(1)}(j)\pi_j^{(1)}(N)=A^{(1)}(j)\pi_{j+1}^{(1)}(N)+D^{(1)}\pi_{H_1}^{(2)}(N), \qquad j=H_1,...,H_2-2;$$

$$B^{(1)}(H_2-1)\pi_{H_2-1}^{(1)}(N)=D^{(1)}\pi_{H_1}^{(2)}(N).$$

A solution of the last equations is

$$\pi_j^{(1)}(N)=\left[\sum_{k=j}^{H_2-1}\left(\prod_{i=j}^{k-1}\overline{B}^{(1)}(i)A^{(1)}(i)\right)\overline{B}^{(1)}(k)D^{(1)}\right]\pi_{H_1}^{(2)}(N),$$

$$j=H_1,...,H_2-1.$$

From (54) we find

$$\pi_{H_1-1}^{(1)}(N)=\overline{B}^{(1)}(H_1-1)A^{(1)}(H_1-1)\pi_{H_1}^{(1)}(N)+\overline{B}^{(1)}(H_1-1)A^{(1)}(H_1-1)\pi_{H_1}^{(2)}(N)=$$

$$=\overline{B}^{(1)}(H_1-1)A^{(1)}(H_1-1)\left[\sum_{k=H_1}^{H_2-1}\left(\prod_{i=j}^{k-1}\overline{B}^{(1)}(i)A^{(1)}(i)\right)\overline{B}^{(1)}(k)D^{(1)}\right]\pi_{H_2}^{(2)}(N)+$$

$$+\overline{B}^{(1)}(H_1-1)A^{(1)}(H_1-1)\pi_{H_1}^{(2)}(N)=$$

$$=\overline{B}^{(1)}(H_1-1)A^{(1)}(H_1-1)\left[E+\sum_{k=H_1}^{H_2-1}\left(\prod_{i=j}^{k-1}\overline{B}^{(1)}(i)A^{(1)}(i)\right)\overline{B}^{(1)}(k)D^{(1)}\right]\pi_{H_1}^{(2)}(N).$$

Let us consider (52) for $j=0,1,...,H_1-2$. It may be written in the form

$$B^{(1)}(j)\pi_j^{(1)}(N)=A^{(1)}(j)\pi_{j+1}^{(1)}(N), \qquad j=0,1,...,H_1-2.$$

The solution of this recurrent relation is

$$\pi_j^{(1)}(N) = \left(\prod_{i=j}^{H_1-2} \overline{B}^{(1)}(i) A^{(1)}(i) \right) \pi_{H_1-1}^{(1)}(N) =$$

$$= \left(\prod_{i=j}^{H_1-1} \overline{B}^{(1)}(i) A^{(1)}(i) \right) \left[E + \sum_{k=H_1}^{H_2-1} \left(\prod_{i=j}^{k-1} \overline{B}^{(1)}(i) A^{(1)}(i) \right) \overline{B}^{(1)}(k) D^{(1)} \right] \pi_{H_1}^{(2)}(N),$$

$$j = 0,1,\ldots,H_1 - 2 .$$

Thus

$$\pi_j^{(1)}(N) = F^{(1)}(j)\pi_{H_1}^{(2)}(N) = F^{(1)}(j)F^{(2)}(H_1, N-1)\pi_N^{(2)}(N), \quad j = 0,1,\ldots,H_2 - 1. \qquad (60)$$

We take into consideration the equations (56) for $i = 0,1,\ldots,n-2$ and add to them an identity $\pi_{0N}^{(2)}(N) = \pi_{0N}^{(2)}(N)$. These equations may be represented in a vector-matrix form

$$C(N)\pi_N^{(2)}(N) = \pi_{0N}^{(2)}(N)e_1 \qquad \text{or} \qquad \pi_N^{(2)}(N) = \pi_{0N}^{(2)}(N)C^{-1}(N)e_1 .$$

From here we find

$$\pi_j^{(2)}(N) = \pi_{0N}^{(2)}(N)F^{(2)}(j, N-1)C^{-1}(N)e_1 = \pi_{0N}^{(2)}(N)F^{(2)}(j, N)e_1, \qquad (61)$$

$$j = H_1,\ldots,N ,$$

and

$$\pi_j^{(1)}(N) = \pi_{0N}^{(2)}(N)F^{(1)}(j)F^{(2)}(H_1, N-1)C^{-1}(N)e_1 = \pi_{0N}^{(2)}(N)F^{(1)}(j)F^{(2)}(H_1, N)e_1, \quad (62)$$

$$j = 0,1,\ldots,H_2 - 1 .$$

Let us write out $\pi_{0N}^{(2)}(N)$ via $\pi_{00}^{(2)}(N)$. From (62) under $j = 0$

$$\pi_0^{(1)}(N) = \pi_{0N}^{(2)}(N)F^{(1)}(0)F^{(2)}(H_1, N)e_1 \qquad \text{and}$$

$$\pi_{0N}^{(2)}(N) = \pi_{00}^{(1)}(N)\left[e_1^T F^{(1)}(0)F^{(2)}(H_1, N)e_1 \right]^{-1} .$$

Thus

$$\pi_j^{(2)}(N) = \pi_{00}^{(1)}(N)\Delta_j^{(2)}(N), \qquad j = H_1,\ldots,N , \qquad (63)$$

and

$$\pi_j^{(1)}(N) = \pi_{00}^{(1)}(N)\Delta_j^{(1)}(N), \qquad j = 0,1,\ldots,H_2 - 1 . \qquad (64)$$

Now the formulas (43), (44) may be deduced from (47) – (51) and the formula (45) from (56) for $i = n-1$. Obviously, (46) is an implication of a normalization condition.

The theorem is proved.

Let $Q(t,N) = (Q_1(t,N), Q_2(t,N), Q_3(t,N))^T$ be the homogeneous Markov chain in the phase set $S(N)$ with continuous time $t \ge 0$ and the transition probabilities given by the infinitesimal rates $q_{(i',j',r')}^{(i,j,r)}(N)$, $(i,j,r),(i',j',r') \in S(N)$. Then $\pi_{ij}^{(r)}(N), (i,j,r) \in S(N)$, is a stationary distribution of the process $Q(t,N)$.

For the Markov chains $Q(t,N), N > H_2$ and $Q(t)$ the conditions of the Theorem 1 from [18] are held. From here it follows a stochastic ordering of the probability distributions related to $Q(t,N)$ and $Q(t)$. Moreover, with the ergodicity condition the stationary distribution $\pi_{ij}^{(r)}, (i,j,r) \in S$ for $Q(t)$ exists and

$$\lim_{N\to\infty} \pi_{ij}^{(r)}(N) = \pi_{ij}^{(r)}. \tag{65}$$

Taking into account (65) we determine an existence

$$\lim_{N\to\infty} \pi_j^{(r)}(N) / \pi_{00}^{(r)}(N) = \pi_j^{(r)} / \pi_{00}^{(r)} = \Delta_j^{(r)} = (\Delta_{0j}^{(r)}, \ldots, \Delta_{n-1j}^{(r)})^T, \tag{66}$$

where $\pi_j^{(r)} = (\pi_{0j}^{(r)}, \ldots, \pi_{n-1j}^{(r)})^T$, $j = 0,1,\ldots;$ $r = 1,2$.

Now the result of Theorem 4 may be converted in the similar conclusion for $\pi_{ij}^{(r)}, (i,j,r) \in S$.

Theorem 5. If $h_1, h_2 > 0$ and $h_2 / n\mu < 1$ then a stationary regime exists and the stationary probabilities have represented in the form:

$$\pi_j^{(1)} = \pi_{00}^{(1)} \Delta_j^{(1)}, \qquad j = 0,1,\ldots,H_2 - 1; \tag{67}$$

$$\pi_j^{(2)} = \pi_{00}^{(1)} \Delta_j^{(2)}, \qquad j = H_1,\ldots,N; \tag{68}$$

$$\pi_{nj}^{(1)} = \pi_{00}^{(1)} \left[\frac{(j+1)\nu}{h_1} \overline{1}^T(n) \Delta_{j+1}^{(1)} \chi_{H_2-2}(j) + \frac{H_1\nu}{h_1} \overline{1}^T(n) \Delta_{H_1}^{(2)} \overline{\chi}_{H_1-2}(j) \right], \tag{69}$$

$$j = 0,1,\ldots,H_2 - 1;$$

$$\pi_{nj}^{(2)} = \pi_{00}^{(1)} \left[\frac{(j+1)\nu}{h_2} \overline{1}^T(n) \Delta_{j+1}^{(2)} - \frac{H_1\nu}{h_2} \overline{1}^T(n) \Delta_{H_1}^{(2)} \chi_{H_2-1}(j) \right], \qquad j = H_1,\ldots,N-1; \tag{70}$$

and

$$\pi_{00}^{(1)} = \left\{ \sum_{j=0}^{H_2-1} \overline{1}^T(n) \left(\Delta_j^{(1)} + \frac{(j+1)\nu}{h_1} \Delta_{j+1}^{(1)} \chi_{H_2-2}(j) + \frac{H_1\nu}{h_1} \Delta_{H_1}^{(2)} \overline{\chi}_{H_1-2}(j) \right) + \right.$$

$$\left. + \sum_{j=H_1}^{\infty} \overline{1}^T(n) \left(\Delta_j^{(2)} + \frac{(j+1)\nu}{h_2} \Delta_{j+1}^{(2)} - \frac{H_1\nu}{h_2} \Delta_{H_1}^{(2)} \chi_{H_2-1}(j) \right) \right\}^{-1} . \qquad (71)$$

Starting from the representation (67) - (71) we can propose a calculating scheme for finding of the stationary probabilities $\pi_{ij}^{(r)}, (i, j, r) \in S$. As in the case of the models from Section 3 this representation is the starting point to construct the closed scalar formulas of an explicit form for stationary probabilities via the model parameters when we analyze the special queues.

Let us consider an application of Theorem 3 to solution of the following optimization problem:

$$W(h_1,h_2) = C_1 S_1(h_1,h_2) - C_2 S_2(h_1,h_2) - C_3 S_3(h_1,h_2) \to \max ,$$

where

$S_1(h_1,h_2)$ is the number of calls served in the system;

$S_2(h_1,h_2)$ is the number of calls which were rejected and transformed in retrial calls;

$S_3(h_1,h_2)$ is the number of switchings of the input flow rate.

Under conditions of Lemma 4 the limit functionals $S_i(h_1,h_2), i = 1,2,3$ exists and may be written via the stationary probabilities $\pi_{ij}^{(r)}, (i, j, r) \in S$:

$$S_1(h_1,h_2) = \sum_{j=0}^{h_2-1} \sum_{i=1}^{n} i\mu\pi_{ij}^{(1)} + \sum_{j=h_1}^{\infty} \sum_{i=1}^{n} i\mu\pi_{ij}^{(2)} ,$$

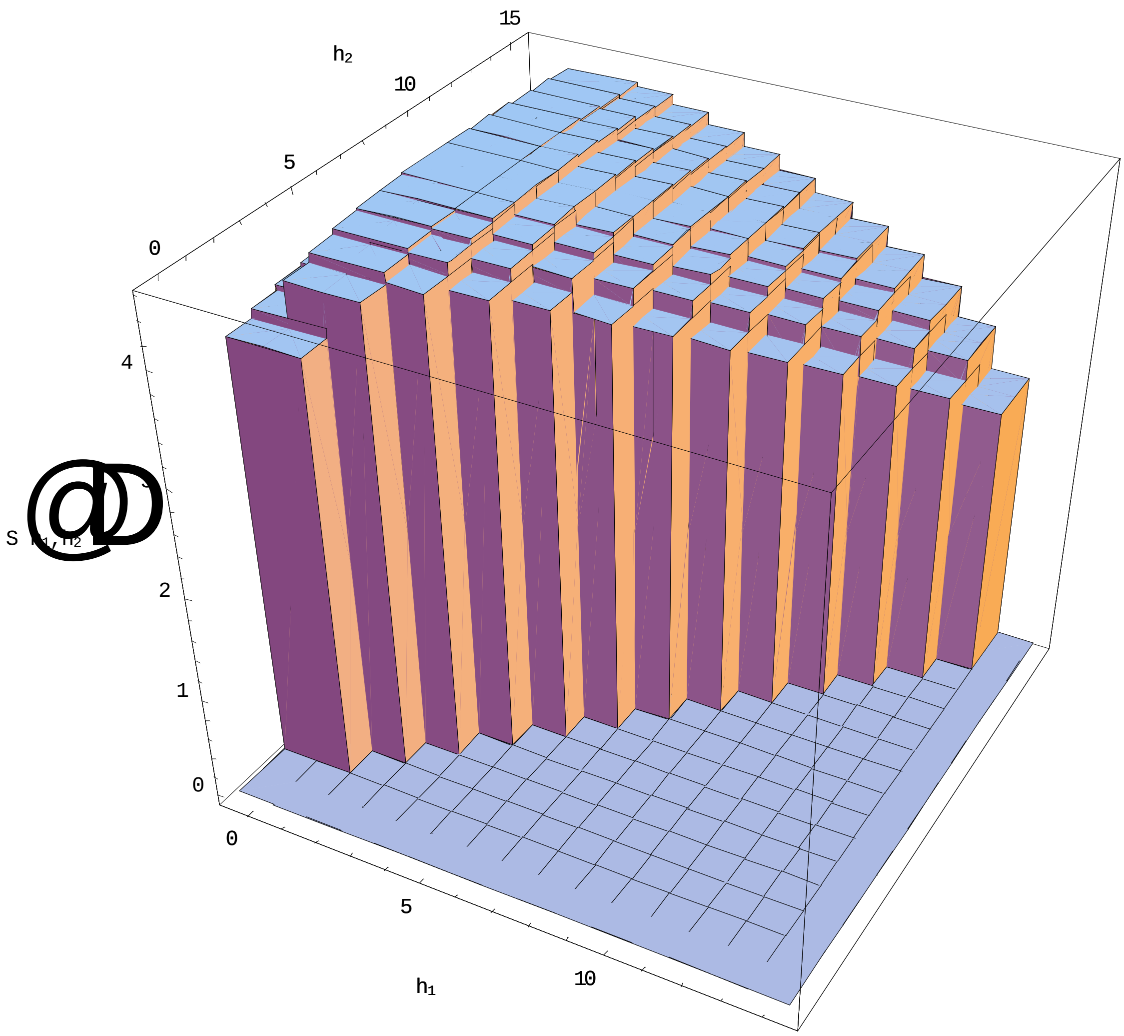
$$S_2(h_1,h_2) = \sum_{j=0}^{h_2-1} \lambda_1 \pi_{nj}^{(1)} + \sum_{j=h_1}^{\infty} \lambda_2 \pi_{nj}^{(2)} ,$$

$$S_3(h_1,h_2) = \lambda_1 \pi_{nh_2-1}^{(1)} + h_1\nu \sum_{i=0}^{n-1} \pi_{ih_1}^{(2)} .$$

A solution of this optimization problem is such thresholds h_1 and h_2 which maximize mean income derived by the controlled queue in process of its operation.

Let us consider the case of the system $M/M/2/15$ with parameters : □=1,1; □=0,1; $\lambda_1(j) = 1 + j/1{,}3$, $\lambda_2(j) = (j+2)/(2j+1)$ and coefficients of costs: $C_1 = 8$; $C_2 = 2$; $C_3 = 1.5$.

The program written on the basis of the obtained formulas leads to the following graphics chart for the objective function



Calculation gives the following values of the objective function:

0	3.939	4.020	4.072	4.108	4.133	4.150	4.162	4.168	4.171	4.170	4.168	4.163	4.160
0	0	4.322	4.416	4.467	4.495	4.509	4.513	4.509	4.500	4.487	4.471	4.454	4.441
0	0	0	4.327	4.431	4.481	4.504	4.510	4.505	4.492	4.474	4.453	4.431	4.414
0	0	0	0	4.214	4.330	4.384	4.405	4.408	4.399	4.382	4.360	4.337	4.320
0	0	0	0	0	4.062	4.191	4.249	4.272	4.274	4.263	4.245	4.224	4.208
0	0	0	0	0	0	3.895	4.035	4.099	4.124	4.126	4.116	4.100	4.088
0	0	0	0	0	0	0	3.721	3.872	3.941	3.968	3.973	3.966	3.961
0	0	0	0	0	0	0	0	3.544	3.705	3.779	3.810	3.820	3.825
0	0	0	0	0	0	0	0	0	3.365	3.536	3.617	3.654	3.676
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3.188	3.368	3.458	3.505
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3.011	3.202	3.300
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2.831	3.029
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2.622
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

The maximum value of the objective function is $W(2.9) = 4{,}513$ and it is achieved at the values of thresholds $h_1 = 2,\ h_2 = 9$.

5. SYSTEMS WITH THE RESTRITED NUMBER OF RETRIALS

Зазвичай при дослідженні систем з повторними викликами вважається, що кожна з вимог може повторно звертатися до системи до тих пір, поки не отримає обслуговування. Це є лише наближенням до реальних ситуацій, тому що число повторних звернень до системи часто буває обмеженим. Дослідження систем з обмеженим числом повторних спроб отримати обслуговування, що включає обгрунтування наявності стаціонарного режиму і побудову алгоритмів підрахунку стаціонарного розподілу, є досить актуальним на даний час, зокрема, з точки зору їх оптимізації. Особливе практичне значення мають задачі оптимального вибору інтенсивності вхідного потоку. При виборі стратегії керування ми будемо обмежуватися класом порогових або гістерезисних стратегій. Це означає відповідну залежність інтенсивності від кількості джерел повторних викликів. Такі модифікації математичної моделі ще більш ускладнюють її дослідження.

Формально система з обмеженим числом повторних викликів функціонує наступним чином (рис. 1). Іззовні до системи, яка складається з n приладів, надходять вимоги для обслуговування. Якщо у момент надходження є хоча б один вільний прилад, то вимога відразу починає обслуговуватися і після цього залишає систему. Час обслуговування – показниково розподілена випадкова величина з параметром μ. Вимога має можливість спробувати отримати обслуговування $m+1$ раз, враховуючи початкове звернення. На орбіті вимоги утворюють окремі сукупності відповідно до числа здійснених спроб отримати обслуговування. Таким чином, вимога, що здійснила k-ту спробу, є елементом k-ї сукупності. Якщо така вимога здійснює наступну спробу отримати обслуговування, то у випадку наявності вільного приладу вона обслуговується і залишає систему. У протилежному випадку така вимога формує ще одне джерело повторного виклику, що відноситься до $(k+1)$-ї сукупності. При цьому звільняється місце в k-й сукупності. Вимога, яка при $(m+1)$-й спробі (враховуючи початкову) застає всі прилади зайнятими, залишає систему та не отримує обслуговування.

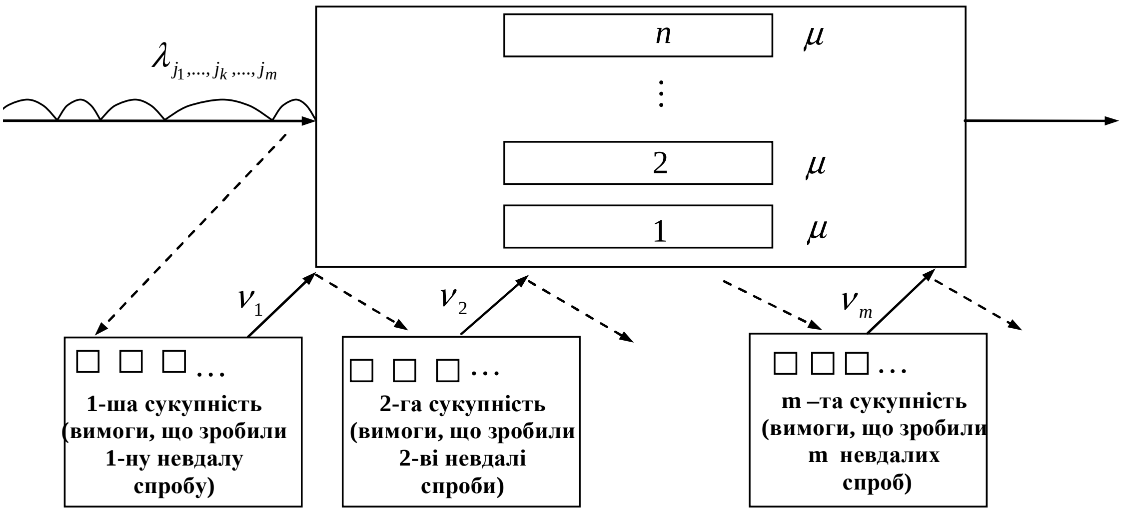


Рис. 1. Структура стохастичної системи з m повторними спробами.

Інтенсивність вхідного потоку λ залежить від кількості вимог $j_k \in Z_+$, $k = 1, 2, \dots, m$ (Z_+ - множина цілих невід'ємних чисел), що зробили " k " невдалих спроб отримати обслуговування: $\lambda = \lambda_{j_1,\dots,j_k,\dots,j_m}$. Щоб повністю задати модель, нам також будуть потрібні ν_k, $k = 1, 2, \dots, m$ - інтенсивності k - ої повторної спроби. У подальшому будемо вважати, що всі $\mu, \nu_k, \lambda_{j_1,\dots,j_k,\dots,j_m} > 0$. При виконанні цієї умови будемо казати, що параметри моделі невироджені. Як правило, на практиці ми маємо справу з невиродженими параметрами.

Описану вище модель будемо кодувати символом $[M_Q | M | n | \infty]$ і додатково вказувати на " m " повторних спроб отримати обслуговування.

Процес обслуговування вимог у системі такого типу описується $(m+1)$-вимірним ланцюгом Маркова з неперервним часом $Q(t) = \left(Q_0(t), Q_1(t), \dots, Q_m(t)\right)^T$, $t \geq 0$ у фазовому просторі $S(Q) = \{0, 1, \dots, n\} \times Z_+^m$, Компонента $Q_0(t)$ вказує на кількість зайнятих приладів у момент часу t, $Q_k(t)$ дорівнює числу вимог у момент часу t, які зробили k невдалих спроб отримати обслуговування, $k = 1, 2, \dots, m$, m – кількість повторних спроб. Інфінітезимальні характеристики $a_{\beta'}^{\beta}$, $\beta = (i, j_1, \dots, j_k, \dots, j_m)$,

$\beta' = (i', j'_1, ..., j'_k, ..., j'_m) \in S(Q)$ ланцюга Маркова $Q(t)$ визначаються наступним чином:

1) якщо $i = 0, 1, ..., n-1$, $j_k \in Z_+$, $k = 1, 2, ..., m$, то

$$a_{\beta'}^{\beta} = \begin{cases} \lambda_{j_1, ..., j_k, ..., j_m}, \text{ при } \beta' = (i+1, j_1, ..., j_k, ..., j_m), \\ i\mu, \text{ при } \beta' = (i-1, j_1, ..., j_k, ..., j_m), \\ j_1\nu_1, \text{ при } \beta' = (i+1, j_1 - 1, ..., j_k, ..., j_m), \\ j_2\nu_2, \text{ при } \beta' = (i+1, j_1, j_2 - 1, ..., j_k, ..., j_m), \\ ... \\ j_k\nu_k, \text{ при } \beta' = (i+1, j_1, ..., j_k - 1, ..., j_m), \\ ... \\ j_m\nu_m, \text{ при } \beta' = (i+1, j_1, ..., j_k, ..., j_m - 1), \\ -\left(\lambda_{j_1, ..., j_k, ..., j_m} + i\mu + \sum_{k=1}^{m} j_k\nu_k\right), \text{ при } \beta' = (i, j_1, ..., j_k, ..., j_m), \\ 0, \text{ в інших випадках;} \end{cases} \tag{74}$$

2) якщо $i = n$, $j_k \in Z_+$, $k = 1, 2, ..., m$, то

$$a_{\beta'}^{\beta} = \begin{cases} \lambda_{j_1, ..., j_k, ..., j_m}, \text{ при } \beta' = (n, j_1 + 1, ..., j_k, ..., j_m), \\ n\mu, \text{ при } \beta' = (n-1, j_1, ..., j_k, ..., j_m), \\ j_1\nu_1, \text{ при } \beta' = (n, j_1 - 1, j_2 + 1, ..., j_m), \\ j_2\nu_2, \text{ при } \beta' = (n, j_1, j_2 - 1, j_3 + 1, ..., j_m), \\ ... \\ j_k\nu_k, \text{ при } \beta' = (n, j_1, ..., j_k - 1, j_{k+1} + 1, ..., j_m), \\ ... \\ j_{m-1}\nu_{m-1}, \text{ при } \beta' = (n, j_1, ..., j_k, ..., j_{m-1} - 1, j_m + 1), \\ j_m\nu_m, \text{ при } \beta' = (n, j_1, ..., j_k, ..., j_m - 1), \\ -\left(\lambda_{j_1, ..., j_k, ..., j_m} + n\mu + \sum_{k=1}^{m} j_k\nu_k\right), \text{ при } \beta' = (n, j_1, ..., j_k, ..., j_m), \\ 0, \text{ в інших випадках.} \end{cases} \tag{75}$$

Лема 5. Якщо $\overline{\lim_{j_m \to \infty}} j_m^{-1}\lambda_{j_1, ..., j_m} < \nu_m$ та $\lambda_{j_1, ... j_m}, \mu, \nu_k > 0$, $k = 1, 2, ..., m$, $j_k \in Z_+$, то для процесу обслуговування $Q(t)$, $t \geq 0$ системи типу $[M_Q | M | n | \infty]$ з m повторними спробами існує стаціонарний режим.

Доведення. Для того, щоб довести існування стаціонарного режиму для процесу обслуговування $Q(t)$, $t \geq 0$, застосуємо теорему Твіді ([1], с. 97). Розглянемо $\phi(i,\, j_1, \ldots,\, j_m) = \phi(\beta) = \sum_{k=1}^{m} j_k$, $\beta \in S(Q)$ в якості тест-функцій Ляпунова. Для них середній перенос, що визначається як

$$y_\beta = \sum_{\beta \neq \beta'} a_{\beta'}^{\beta} \left(\varphi(\beta') - \varphi(\beta)\right),$$

де $\beta = (i,\, j_1, \ldots,\, j_m)$, $\beta' = (i',\, j_1', \ldots,\, j_m') \in S(Q)$, дорівнює

$$y_\beta = \begin{cases} -\sum\limits_{k=1}^{m} j_k \nu_k, \ \text{при} \ i = 0, 1, \ldots, n-1, \\ \lambda_{j_1, \ldots, j_m} - j_m \nu_m, \ \text{при} \ i = n \ . \end{cases}$$

При $\overline{\lim_{j_m \to \infty}}\, j_m^{-1} \lambda_{j_1, \ldots,\, j_m} < \nu_m$ та $\lambda_{j_1, \ldots, j_m}, \mu, \nu_k > 0$, $j_k \in Z_+$, $k = 1, 2, \ldots, m$ для $y_{i, j_1, \ldots, j_m}$ виконуються умови теореми Твіді ([1], стор. 97). Таким чином процес $Q(t)$ є регулярним, ергодичним і його граничний розподіл співпадає з єдиним стаціонарним розподілом. Лему доведено.

Нехай $\pi_{i, j_1, \ldots, j_m}$, $(i, j_1, \ldots, j_m) \in S(Q)$, стаціонарні ймовірності системи

$$\pi_{i, j_1, \ldots, j_m} = \lim_{t \to \infty} P\left\{Q_0(t) = i, Q_1(t) = j_1, \ldots, Q_m(t) = j_m\right\},$$

що задовольняють наступну систему рівнянь Колмогорова:

$$\left(\lambda_{j_1, \ldots, j_m} + i\mu + \sum_{k=1}^{m} j_k \nu_k\right) \pi_{i, j_1, \ldots, j_m} = \lambda_{j_1, \ldots, j_m} \pi_{i-1, j_1, \ldots, j_m} +$$

$$+ (i+1)\mu \pi_{i+1, j_1, \ldots, j_m} + \sum_{k=1}^{m} (j_k + 1) \nu_k \pi_{i-1, j_1, \ldots, j_k + 1, \ldots, j_m}, \tag{76}$$

$$i = 0, 1, \ldots, n-1, \quad j_k \in Z_+, \quad k = 1, \ldots, m,$$

$$\left(\lambda_{j_1, \ldots, j_m} + n\mu + \sum_{k=1}^{m} j_k \nu_k\right) \pi_{n, j_1, \ldots, j_m} = \lambda_{j_1, \ldots, j_m} \pi_{n-1, j_1, \ldots, j_m} +$$

$$+ \lambda_{j_1 - 1, \ldots, j_m} \pi_{n, j_1 - 1, \ldots, j_m} + \sum_{k=1}^{m} (j_k + 1) \nu_k \pi_{n-1, j_1, \ldots, j_k + 1, \ldots, j_m} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{m-1} (j_k + 1) \nu_k \pi_{n, j_1, \ldots, j_k + 1, j_{k+1} - 1 \ldots, j_m} + (j_m + 1) \nu_m \pi_{n, j_1, \ldots, j_m + 1}.$$

$$i = n, \quad j_k \in Z_+, \quad k = 1,...,m. \qquad (77)$$

При необмеженій кількості джерел повторних викликів побудувати явні формули для стаціонарних ймовірностей, що задовольняють систему рівнянь (76) –(77), можливо тільки у деяких часткових випадках. Наприклад, це можна зробити для одноканальних систем з однією спробою повтору.

Для спрощення задачі пошуку стаціонарних імовірностей розглянемо урізану (на рівні N) модель $[M_Q | M | n | \infty]$- системи, яку будемо позначати символом $[M_Q | M | n | N]$, N- фіксоване натуральне число. Така система має скінченне число N місць для вимог, що здійснили "k" невдалих спроб отримати обслуговування, $k = 1, 2, ..., m$. Вимога після k- ої невдалої спроби отримати обслуговування залишає систему, якщо заповнені всі N місць для вимог з "k" невдалими спробами.

Процес обслуговування для $[M_Q | M | n | N]$ - системи визначається $(m+1)$ - вимірним ланцюгом Маркова з неперервним часом $Q(t,N) = \left(Q_0(t,N), Q_1(t,N), ..., Q_m(t,N)\right)^T$, $t \ge 0$ у фазовому просторі $S(Q(N)) = \{0,1,...,n\} \times \underbrace{\{0,1,...,N\} \times ... \times \{0,1,...,N\}}_{m \text{ раз}}$. Компонента $Q_0(t,N)$ вказує на кількість зайнятих приладів у момент часу t у системі, $Q_k(t,N)$ дорівнює числу вимог у момент часу t, які зробили k невдалих спроб отримати обслуговування, $k = 1, 2,..., m$. Інфінітезимальні характеристики $a_{\beta'}^{\beta}(N)$, $\beta = (i, j_1, ..., j_m)$, $\beta' = (i', j_1',..., j_m') \in S(Q(N))$ співпадають з (74) для $i = 0, 1, ..., n-1$. У випадку $i = n$ формули (75) потребують корекції. У зв'язку з цим для $k = 1,...,m$ введемо індикаторні функції

$$\chi_k(j_1,..., j_m) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } j_k = N, \\ 0, & \text{у протилежному випадку,} \end{cases}$$

$$\bar{\chi}_k(j_1,..., j_m) = 1 - \chi_k(j_1,..., j_m).$$

Тоді рівності (75) для процеса $Q(t,N)$ переходять у такі співвідношення:

$2'$) якщо $i = n$, $j_k \in \{0,1,...,N\}$, $k = 1,2,...,m$, то

$$a_{\beta'}^{\beta}(N)=\begin{cases}\overline{\chi}_1(j_1,...,j_m)\lambda_{j_1,...,j_m}, & \text{при } \beta'=(n,\ j_1+1,...,\ j_m),\\ n\mu, & \text{при } \beta'=(n-1,\ j_1,...,\ j_m),\\ j_1\nu_1\overline{\chi}_2(j_1,...,j_m), & \text{при } \beta'=(n,\ j_1-1,\ j_2+1,\ ...,\ j_m),\\ ... & \\ j_{m-1}\nu_{m-1}\overline{\chi}_m(j_1,...,j_m), & \text{при } \beta'=(n,j_1,...,j_{m-1}-1,j_m+1),\\ j_m\nu_m, & \text{при } \beta'=(n,j_1,...,j_m-1),\\ -\left(\overline{\chi}_1(j_1,...,j_m)\lambda_{j_1,...,j_m}+n\mu+\sum\limits_{k=1}^{m-1}j_k\nu_k\overline{\chi}_{k+1}(j_1,...,j_m)+j_m\nu_m\right), & \\ & \text{при } \beta'=(n,j_1,...,j_m),\\ 0, & \text{в інших випадках.}\end{cases}$$

Оскільки фазовий простір процесу $Q(t,N)$ скінченний, то для нього існує стаціонарний режим і через $\pi_{i,j_1,...,j_m}(N)$, $(i,\ j_1,...,\ j_m)\in S(Q(N))$ будемо позначати стаціонарні ймовірності урізаної моделі:

$$\pi_{i,j_1,...,j_m}(N)=\lim_{t\to\infty}P\left\{Q_0(t,N)=i,Q_1(t,N)=j_1,...,Q_m(t,N)=j_m\right\}.$$

Вигляд інфінітезимальних характеристик $a_{\beta'}^{\beta}$, β, $\beta'\in S(Q)$ та $a_{\beta'}^{\beta}(N)$, β, $\beta'\in S(Q(N))$ дає право говорити, що процеси обслуговування $Q(t)$ та $Q(t,N)$ є стохастично впорядкованими процесами міграції ([1]). Тоді при $N\to\infty$ стаціонарні ймовірності $\pi_{i,j_1,...,j_m}(N)$ урізаної моделі $[M_Q\,|\,M\,|\,n\,|\,N]$ з m повторними спробами апроксимують стаціонарні ймовірності $\pi_{i,j_1,...,j_m}$ моделі $[M_Q\,|\,M\,|\,n\,|\,\infty]$ з m повторними спробами.

5.1. CONTROLLED SYSTEMS WITH A SINGLE RETRIAL

Розглянемо $[M_Q\,|\,M\,|\,n\,|\,\infty]$- систему з однією спробою повтору, $m=1$. Це означає, що вимога, яка при повторному зверненні знайшла всі прилади зайнятими, залишає систему та не отримує обслуговування. Інтенсивність вхідного потоку для такої системи задається параметром λ_j, $j=0,1,...$, що залежить від кількості джерел повторних викликів.

Процес обслуговування вимог у системі такого типу задається двовимірним ланцюгом Маркова $Q(t)=\left(Q_0(t),Q_1(t)\right)^T$, $t\ge 0$, де $Q_0(t)$ вказує на кількість зайнятих приладів у момент часу t, а $Q_1(t)$ дорівнює числу джерел повторних викликів, які здійснили одну невдалу спробу отримати обслуговування.

Інфінітезимальні характеристики $a_{(i',\, j')}^{(i,\, j)}$, $(i,\, j),(i',\, j')\in S(Q)=\{0,1,\dots,n\}\times\{0,1,\dots\}$ ланцюга Маркова $Q(t)$, $t\ge 0$ визначаються (74), (75) при $m=1$:

1) якщо $i=0,1,\dots,n-1$, $j=0,1,\dots$, то

$$a_{(i',\, j')}^{(i,\, j)}=\begin{cases}\lambda_j, & \text{при } (i',\, j')=(i+1,\, j),\\ i\mu, & \text{при } (i',\, j')=(i-1,\, j),\\ j\nu, & \text{при } (i',\, j')=(i+1,\, j-1),\\ -(\lambda_j+i\mu+j\nu), & \text{при } (i',\, j')=(i,\, j),\\ 0, & \text{в інших випадках;}\end{cases} \tag{78}$$

2) якщо $i=n$, $j=0,1,\dots$, то

$$a_{(i',\, j')}^{(n,\, j)}=\begin{cases}\lambda_j, & \text{при } (i',\, j')=(n,\, j+1),\\ n\mu, & \text{при } (i',\, j')=(n-1,\, j),\\ j\nu, & \text{при } (i',\, j')=(n,\, j-1),\\ -(\lambda_j+n\mu+j\nu), & \text{при } (i',\, j')=(n,\, j),\\ 0, & \text{в інших випадках.}\end{cases} \tag{79}$$

З Леми 5 випливає такий результат.

Наслідок 6. Якщо система типу $[M_Q\,|\,M\,|\,n\,|\,\infty]$ з однією повторною спробою невироджена та $\overline{\lim\limits_{j\to\infty}}\, j^{-1}\lambda_j<\nu$, то для процесу обслуговування $Q(t)$, $t\ge 0$ існує стаціонарний режим.

Нехай виконуються умови Наслідку 6 і π_{ij}, $(i,j)\in S(Q)$ стаціонарні ймовірності даної системи

$$\pi_{ij}=\lim_{t\to\infty}P\{Q_0(t)=i,Q_1(t)=j\}.$$

Ймовірності π_{ij}, $(i,j)\in S(Q)$ задовольняють системі рівнянь Колмогорова

$$(\lambda_j+j\nu)\pi_{0j}=\mu\pi_{1j},\ j=0,1,\dots, \tag{80}$$

$$(\lambda_j+i\mu+j\nu)\pi_{ij}=(j+1)\nu\pi_{i-1\,j+1}+\lambda_j\pi_{i-1\,j}+(i+1)\mu\pi_{i+1\,j}, \tag{81}$$

$$i=1,2,\dots,n-1,\quad j=0,1,\dots,$$

$$(\lambda_j + n\mu + j\nu)\pi_{nj} = \lambda_j \pi_{n-1\,j} + \lambda_{j-1}\pi_{nj-1} + (j+1)\nu\pi_{n-1\,j+1} + (j+1)\nu\pi_{nj+1},$$
$$j = 0, 1, \ldots, \qquad (82)$$

та умові нормування

$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{\infty}\pi_{ij} = 1. \qquad (83)$$

Для кожного $j = 0, 1, \ldots$ побудуємо розбиття фазового простору $S(Q) = S_j(Q) \cup \overline{S_j}(Q)$, де $S_j(Q) = \{(i,m) : m \le j\}$. Використовуючи теорему про рівність потоку ймовірностей через границю області в стаціонарному режимі ([17], стор. 49), маємо

$$\lambda_j \pi_{nj} = (j+1)\nu\,\pi_{0\,j+1} + \ldots + (j+1)\nu\,\pi_{nj+1}, \; j = 0, 1, \ldots \qquad (84)$$

Рівності (84) спрощують процес побудови явних формул для стаціонарних імовірностей, коли в принципі такі формули існують. Можливість побудови явних формул для систем з необмеженим числом повторних викликів напряму залежить від числа приладів "n" (як це було і для класичних моделей з нескінченним числом спроб отримати обслуговування). Тому природньо перейти до урізаних (скінченних) моделей $[M_Q \,|\, M \,|\, n \,|\, N]$ даної системи. Така модель має скінченну кількість місць для повторних викликів N. При умові, що всі прилади зайняті та існує N джерел повторних викликів, нові вимоги при надходженні втрачаються системою назавжди.

Процес обслуговування для системи $[M_Q \,|\, M \,|\, n \,|\, N]$ представляє собою двовимірний ланцюг Маркова $Q(t,N) = \left(Q_0(t,N), Q_1(t,N)\right)^T$ з неперервним часом у фазовому просторі $S(Q(N)) = \{0,1,\ldots,n\} \times \{0,1,\ldots,N\}$. Інфінітезимальні характеристики $a_{(i',\,j')}^{(i,\,j)}(N)$, $(i,\,j), (i',\,j') \in S(Q(N))$ ланцюга $Q(t,N)$ співпадають з (78) для $i = 0, 1, \ldots, n-1$, $j = 0, 1, \ldots, N$ та з (79) для $i = n$, $j = 0, 1, \ldots, N-1$. У випадку $i = n$, $j = N$:

$$a_{(i',\,j')}^{(n,\,N)}(N) = \begin{cases} n\mu, & \text{при} \quad (i',\,j') = (n-1,\,N), \\ N\nu, & \text{при} \quad (i',\,j') = (n,\,N-1), \\ -(n\mu + N\nu), & \text{при} \quad (i',\,j') = (n,\,N), \\ 0, & \text{в інших випадках.} \end{cases}$$

Оскільки фазовий простір процесу $Q(t,N)$ скінченний, то для нього завжди існує стаціонарний режим і через $\pi_{ij}(N)$, $(i,j) \in S(Q(N))$ будемо позначати його стаціонарні ймовірності

$$\pi_{ij}\left(N\right)=\lim_{t\to\infty}P\left\{Q_0\left(t,N\right)=i,Q_1\left(t,N\right)=j\right\}.$$

Для $\pi_{ij}\left(N\right)$, $i=0,1,...,n$, $j=0,1,...,N-1$ справедливі рівняння (80)–(83), (84):

$$(\lambda_j+j\nu)\pi_{0j}\left(N\right)=\mu\,\pi_{1j}\left(N\right),\quad j=0,1,...,N-1, \tag{85}$$

$$(\lambda_j+i\mu+j\nu)\pi_{ij}\left(N\right)=\lambda_j\pi_{i-1j}\left(N\right)+(i+1)\mu\,\pi_{i+1j}\left(N\right)+\left(j+1\right)\nu\pi_{i-1j+1}\left(N\right), \tag{86}$$

$$i=1,2,\ldots,n-1,\quad j=0,1,...,N-1,$$

$$(\lambda_j+n\mu+j\nu)\pi_{nj}(N)=\lambda_j\pi_{n-1j}(N)+\lambda_{j-1}\pi_{nj-1}(N)+\left(j+1\right)\nu\pi_{n-1j+1}(N)+$$

$$+(j+1)\nu\pi_{nj+1}\left(N\right), \tag{87}$$

$$j=0,1,...,N-1,$$

$$\lambda_j\pi_{nj}\left(N\right)=\left(j+1\right)\nu\,\pi_{0j+1}\left(N\right)+\left(j+1\right)\nu\,\pi_{1j+1}\left(N\right)+...+\left(j+1\right)\nu\,\pi_{nj+1}\left(N\right), \tag{88}$$

$$j=0,1,...,\quad N-1,$$

а для $\pi_{iN}\left(N\right)$, $i=0,1,...,n$ маємо:

$$(\lambda_N+N\nu)\pi_{0N}\left(N\right)=\mu\,\pi_{1N}\left(N\right), \tag{89}$$

$$(\lambda_N+i\mu+N\nu)\pi_{iN}\left(N\right)=\lambda_N\pi_{i-1N}\left(N\right)+(i+1)\mu\,\pi_{i+1N}\left(N\right),\ i=1,2,...,n-1, \tag{90}$$

$$(n\mu+N\nu)\pi_{nN}\left(N\right)=\lambda_N\pi_{n-1N}\left(N\right)+\lambda_{N-1}\,\pi_{nN-1}\left(N\right). \tag{91}$$

Разом з (85)-(91) треба враховувати умову нормування

$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{N}\pi_{ij}(N)=1.$$

Процеси обслуговування $Q(t)$ та $Q(t,N)$ є процесами міграції. Тому на основі результатів [1] (теореми 2.3 та 2.4, розділ 2) при $N\to\infty$ стаціонарні ймовірності $\pi_{ij}\left(N\right)$ урізаної моделі $[M_Q\,|\,M\,|\,n\,|\,N]$ наближають стаціонарні ймовірності π_{ij} $[M_Q\,|\,M\,|\,n\,|\,\infty]$- моделі.

Знайдемо явний вигляд стаціонарних ймовірностей π_{ij}, $\left(i,\,j\right)\in S(Q)$, $S(Q)=\{0,1\}\times\{0,1,...\}$ для одноканальної системи з однією повторною спробою отримати обслуговування. Стаціонарні ймовірності π_{ij}, $\left(i,\,j\right)\in S(Q)$

задовольняють системі рівнянь, що включає рівняння (80) та (82) , (83) при $n = 1$, останні два з яких запишемо наступним чином:

$$(\lambda_j + j\nu + \mu)\pi_{1j} = \lambda_j \pi_{0j} + (j+1)\nu\pi_{1j+1} + \lambda_{j-1}\pi_{1j-1} + (j+1)\nu\pi_{0j+1}, \tag{92}$$

$$j = 0, 1, \ldots,$$

$$\sum_{j=0}^{\infty}(\pi_{0j} + \pi_{1j}) = 1. \tag{93}$$

За домовленістю $\pi_{1,-1} = 0$, $\lambda_{-1} = 0$.

У випадку некерованої інтенсивності вхідного потоку $\lambda_j \equiv \lambda, \quad j = 0,1,\ldots$ для одноканальної системи можна отримати явні формули для стаціонарного розподілу через параметри системи з використанням виродженої гіпергеометричної функції.

Нехай $F(a, b, t) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a(a+1)\ldots(a+k-1)}{b(b+1)\ldots(b+k-1)} \frac{t^k}{k!}$ – функція Куммера (вироджена гіпергеометрична функція), $b \neq 0, -1, \ldots, -(k-1)$.

Теорема 6. Якщо система невироджена, то для $[M_Q \,|\, M \,|1|\, \infty]$-моделі з однією повторною спробою генератриси $\pi_0(z)$, $\pi_1(z)$, $|z| \leq 1$ стаціонарних ймовірностей $\{\pi_{0j}\}_0^\infty$ і $\{\pi_{1j}\}_0^\infty$ можна подати у вигляді:

$$\pi_0(z) = C(0) F\left(\frac{\lambda}{\nu}, 1 + \frac{\mu}{\nu} + \frac{\lambda}{\nu}, \frac{\lambda}{\nu} z\right), \tag{94}$$

$$\pi_1(z) = \rho C(0) F\left(1 + \frac{\lambda}{\nu}, 1 + \frac{\mu}{\nu} + \frac{\lambda}{\nu}, \frac{\lambda}{\nu} z\right), \tag{95}$$

де
$$C^{-1}(0) = F\left(\frac{\lambda}{\nu}, 1 + \frac{\mu}{\nu} + \frac{\lambda}{\nu}, \frac{\lambda}{\nu}\right) + \rho F\left(1 + \frac{\lambda}{\nu}, 1 + \frac{\mu}{\nu} + \frac{\lambda}{\nu}, \frac{\lambda}{\nu}\right), \ \rho = \frac{\lambda}{\mu}. \tag{96}$$

Доведення. Очевидно, при $\lambda_j \equiv \lambda, \quad j = 0,1,\ldots,$ умови Наслідку 6 виконуються і для процесу обслуговування $Q(t)$, $t \geq 0$ існує стаціонарний режим.

Рівняння (80), (82) при $\lambda_j \equiv \lambda$ набувають вигляду:

$$(\lambda + j\nu)\pi_{0j} = \mu\pi_{1j}, \ j = 0, 1, \ldots, \tag{97}$$

$$(\lambda + j\nu + \mu)\pi_{1j} = \lambda\pi_{0j} + (j+1)\nu\pi_{1j+1} + \lambda\pi_{1j-1} + (j+1)\nu\pi_{0j+1},$$

$$j = 0, 1, \ldots . \qquad (98)$$

Для розв'язку системи рівнянь (97), (98), (93) застосуємо метод генератрис. Нехай $\pi_0(z) = \sum_{j=0}^{\infty} z^j \pi_{0j}$, $\pi_1(z) = \sum_{j=0}^{\infty} z^j \pi_{1j}$, $|z| \le 1$ генератриси послідовностей $\{\pi_{0j}\}_0^{\infty}$ і $\{\pi_{1j}\}_0^{\infty}$ відповідно. Тоді для $\pi_0(z), \pi_1(z)$ рівняння (97), (98) приймають такий вигляд:

$$\lambda \pi_0(z) + \nu z \pi_0'(z) = \mu \pi_1(z),$$

$$(\mu + \lambda(1-z))\pi_1(z) = \lambda \pi_0(z) + \nu \pi_0'(z) + \nu(1-z)\pi_1'(z). \qquad (99)$$

Використовуючи (84), рівняння (99) можна спростити. В термінах генератрис (84) означає

$$\lambda \pi_1(z) = \nu \pi_1'(z) + \nu \pi_0'(z).$$

Враховуючи це, (99) зводиться до

$$\nu z \pi_1'(z) = \lambda \pi_0(z) + (\lambda z - \mu)\pi_1(z).$$

Отже, для пошуку функцій $\pi_0(z)$, $\pi_1(z)$ маємо систему диференціальних рівнянь:

$$\pi_1(z) = \frac{\nu}{\mu} z \pi_0'(z) + \frac{\lambda}{\mu} \pi_0(z), \qquad (100)$$

$$\pi_0(z) = \frac{\nu}{\lambda} z \pi_1'(z) + \left(\frac{\mu}{\lambda} - z\right)\pi_1(z). \qquad (101)$$

З рівняння (100) маємо

$$\pi_1'(z) = \frac{\nu}{\mu} z \pi_0''(z) + \left(\frac{\nu}{\mu} + \frac{\lambda}{\mu}\right)\pi_0'(z).$$

Підставляючи цей вираз у (101), приходимо до диференціального рівняння другого порядку для функції $\pi_0(z)$:

$$z\pi_0''(z) + \left(1 + \frac{\mu}{\nu} + \frac{\lambda}{\nu} - \frac{\lambda}{\nu} z\right)\pi_0'(z) - \left(\frac{\lambda}{\nu}\right)^2 \pi_0(z) = 0. \qquad (102)$$

Аналогічно для $\pi_1(z)$ маємо:

$$z\pi_1''(z) + \left(1 + \frac{\mu}{\nu} + \frac{\lambda}{\nu} - \frac{\lambda}{\nu} z\right)\pi_1'(z) - \frac{\lambda}{\nu}\left(1 + \frac{\lambda}{\nu}\right)\pi_1(z) = 0.$$

Розглянемо спочатку рівняння (102), яке можна подати у вигляді

$$zu''(z)+(\gamma-\beta z)u'(z)-\alpha u(z)=0\,, \tag{103}$$

де $u(z)=\pi_0(z),\ \alpha=\left(\frac{\lambda}{\nu}\right)^2,\ \beta=\frac{\lambda}{\nu},\ \gamma=1+\frac{\mu}{\nu}+\frac{\lambda}{\nu}.$

Зробимо заміну $t=\beta z$, $u(z)=u(\beta^{-1}t)=v(t)$. Тоді $u(z)=v(\beta z)$, а функція $v(t)$ задовольняє рівнянню

$$tv''(t)+(\gamma-t)v'(t)-\frac{\alpha}{\beta}v(t)=0\,, \tag{104}$$

яке є виродженим гіпергеометричним рівнянням.

Якщо γ не ціле число, то його загальний розв'язок (див., наприклад, [21], стор.389) представляє собою лінійну комбінацію двох функцій

$$v(t)=C_1F\left(\frac{\alpha}{\beta},\gamma,t\right)+C_2t^{1-\gamma}F\left(\frac{\alpha}{\beta}-\gamma+1,2-\gamma,t\right),$$

де $F(a,b,t)$ – вироджена гіпергеометрична функція, що визначена вище.

Якщо $\gamma=m$ – натуральне число, то $m\ge 2$ (за визначенням $\gamma=1+\frac{\mu}{\nu}+\frac{\lambda}{\nu}>1$), і загальний розв'язок рівняння (104)має вигляд:

$$v(t)=C_1F\left(\frac{\alpha}{\beta},m,t\right)+C_2\left\{\sum_{k=0}^{m-2}(-1)^{m-k}(m-k-2)!C^k_{\alpha/\beta-m+k}t^{k+1-m}+C^{m-1}_{\alpha/\beta-1}\left[F\left(\frac{\alpha}{\beta},m,t\right)\ln t+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\alpha/\beta(\alpha/\beta+1)...(\alpha/\beta+k-1)}{m(m+1)...(m+k-1)}\frac{t^k}{k!}\sum_{s=0}^{k-1}\left(\frac{1}{\alpha/\beta+s}-\frac{1}{n+s}-\frac{1}{1+s}\right)\right]\right\}.$$

Оскільки $\lim\limits_{z\to 0+}\pi_0(z)=\pi_{00}<\infty$, то в обох випадках $C_2=0$ і ми маємо $\pi_0(z)$ з точністю до мультиплікативного множника $C(0)$:

$$\pi_0(z)=C(0)F\left(\frac{\lambda}{\nu},1+\frac{\mu}{\nu}+\frac{\lambda}{\nu},\frac{\lambda}{\nu}z\right). \tag{105}$$

Аналогічно $\pi_1(z)$ задовольняє рівнянню (103) для $\alpha=\frac{\lambda}{\nu}\left(1+\frac{\lambda}{\nu}\right),\ \beta=\frac{\lambda}{\nu},$ $\gamma=1+\frac{\mu}{\nu}+\frac{\lambda}{\nu}.$

Отже,

$$\pi_1(z) = C(1)F\left(1+\frac{\lambda}{\nu}, 1+\frac{\mu}{\nu}+\frac{\lambda}{\nu}, \frac{\lambda}{\nu}z\right). \tag{106}$$

У розгорнутому вигляді (105), (106) представляють собою:

$$\pi_0(z) = C(0)\left\{1+\sum_{j=1}^{\infty} z^j \left(\frac{\lambda}{\nu}\right)^j \frac{1}{j!}\prod_{i=1}^{j}\frac{\lambda+(i-1)\nu}{\lambda+i\nu+\mu}\right\},$$

$$\pi_1(z) = C(1)\left\{1+\sum_{j=1}^{\infty} z^j \left(\frac{\lambda}{\nu}\right)^j \frac{1}{j!}\prod_{i=1}^{j}\frac{\lambda+i\nu}{\lambda+i\nu+\mu}\right\}.$$

З (97) при $j=0$ маємо $C(1)=\rho C(0)$. Отже

$$\pi_{0j} = C(0)\left(\frac{\lambda}{\nu}\right)^j \frac{1}{j!}\prod_{i=1}^{j}\frac{\lambda+(i-1)\nu}{\lambda+i\nu+\mu}, \tag{107}$$

$$\pi_{1j} = \rho C(0)\left(\frac{\lambda}{\nu}\right)^j \frac{1}{j!}\prod_{i=1}^{j}\frac{\lambda+i\nu}{\lambda+i\nu+\mu},\ j = 0,1,\dots, \tag{108}$$

Тепер з умови нормування (93), яку можна записати в термінах генератрис як

$$\sum_{j=0}^{\infty}\left(\pi_{0j}+\pi_{1j}\right) = \pi_0(1)+\pi_1(1) = 1, \tag{109}$$

знаходимо константу $C(0)$:

$$C^{-1}(0) = F\left(\frac{\lambda}{\nu}, 1+\frac{\mu}{\nu}+\frac{\lambda}{\nu}, \frac{\lambda}{\nu}\right) + \rho F\left(1+\frac{\lambda}{\nu}, 1+\frac{\mu}{\nu}+\frac{\lambda}{\nu}, \frac{\lambda}{\nu}\right). \tag{110}$$

Теорему доведено.

Формули (94) – (96) представляють собою алгоритм підрахунку стаціонарних ймовірностей. На їх основі можна знаходити важливі для практики показники ефективності роботи системи. Так, наприклад:

1) блокуюча ймовірність для первинних викликів

$$P_1 = \pi_1(1) = \rho F\left(1+\frac{\lambda}{\nu}, 1+\frac{\mu}{\nu}+\frac{\lambda}{\nu}, \frac{\lambda}{\nu}\right)C(0);$$

2) ймовірність того, що прилад вільний

$$P_0 = \pi_0(1) = F\left(\frac{\lambda}{\nu}, 1 + \frac{\mu}{\nu} + \frac{\lambda}{\nu}, \frac{\lambda}{\nu}\right) C(0);$$

3) середня кількість джерел для повторних викликів при умові, що прилад вільний

$$N_0 = \pi_0'(1)/P_0 = P_0^{-1}\left(\frac{\mu}{\nu}\pi_1(1) - \frac{\lambda}{\nu}\pi_0(1)\right) =$$

$$= \frac{\lambda}{\nu} P_0^{-1}\left(F\left(1 + \frac{\lambda}{\nu}, 1 + \frac{\mu}{\nu} + \frac{\lambda}{\nu}, \frac{\lambda}{\nu}\right) - F\left(\frac{\lambda}{\nu}, 1 + \frac{\mu}{\nu} + \frac{\lambda}{\nu}, \frac{\lambda}{\nu}\right)\right) C(0) =$$

$$= \frac{\lambda}{\nu}\left[\frac{F\left(1 + \frac{\lambda}{\nu}, 1 + \frac{\mu}{\nu} + \frac{\lambda}{\nu}, \frac{\lambda}{\nu}\right)}{F\left(\frac{\lambda}{\nu}, 1 + \frac{\mu}{\nu} + \frac{\lambda}{\nu}, \frac{\lambda}{\nu}\right)} - 1\right];$$

4) середня кількість джерел для повторних викликів при умові, що прилад зайнятий

$$N_1 = \pi_1'(1)/P_1 = \frac{\lambda}{\nu} P_1^{-1}\left[\pi_0(1) + \left(1 - \frac{\mu}{\lambda}\right)\pi_1(1)\right] = \frac{\mu}{\nu}\left[\frac{F\left(\frac{\lambda}{\nu}, 1 + \frac{\mu}{\nu} + \frac{\lambda}{\nu}, \frac{\lambda}{\nu}\right)}{F\left(1 + \frac{\lambda}{\nu}, 1 + \frac{\mu}{\nu} + \frac{\lambda}{\nu}, \frac{\lambda}{\nu}\right)} - 1\right] + \frac{\lambda}{\nu};$$

5) середня кількість джерел для повторних викликів

$$N = \pi_0'(1) + \pi_1'(1) = \frac{\lambda}{\nu}\pi_1(1) = \frac{\lambda}{\nu}\rho C(0) F\left(1 + \frac{\lambda}{\nu}, 1 + \frac{\mu}{\nu} + \frac{\lambda}{\nu}, \frac{\lambda}{\nu}\right).$$

Для безпосереднього визначення стаціонарних ймовірностей маємо такий результат.

Наслідок 7. Якщо система невироджена, то для $[M_Q \,|\, M \,|1|\, \infty]$ - моделі з однією повторною спробою стаціонарні ймовірності можна подати у вигляді:

$$\pi_{0j} = \frac{\lambda^j}{j!\nu^j}\prod_{i=1}^{j}\frac{\lambda + (i-1)\nu}{\lambda + i\nu + \mu}\pi_{00}, \; j = 1, 2, \ldots, \tag{111}$$

$$\pi_{1j} = \rho\frac{\lambda^j}{j!\nu^j}\prod_{i=1}^{j}\frac{\lambda + i\nu}{\lambda + i\nu + \mu}\pi_{00}, \; j = 0, 1, \ldots, \tag{112}$$

де

$$\pi_{00}^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{\lambda^j}{j!\nu^j}\prod_{i=1}^{j}\frac{\lambda + (i-1)\nu}{\lambda + i\nu + \mu} + \rho\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\lambda^j}{j!\nu^j}\prod_{i=1}^{j}\frac{\lambda + i\nu}{\lambda + i\nu + \mu}, \qquad \rho = \frac{\lambda}{\mu}. \tag{113}$$

Отримані формули представляють собою ефективний алгоритм підрахунку стаціонарних ймовірностей. У випадку змінної інтенсивності вхідного потоку знаходження явних формул для стаціонарних ймовірностей одноканальної системи з однією спробою повтору вимагає іншого підходу. Щоб побудувати такі формули будемо використовувати теорему про рівність потоку ймовірностей через границю замкненої області в стаціонарному режимі.

Теорема 7. Якщо виконуються умови Наслідку 6, то для $[M_Q | M | 1 | \infty]$-моделі з однією повторною спробою стаціонарні ймовірності можна подати у вигляді:

$$\pi_{0j} = \frac{1}{j!\nu^j} \prod_{i=1}^{j} \frac{\lambda_{i-1}\left(\lambda_{i-1} + (i-1)\nu\right)}{\lambda_i + i\nu + \mu} \pi_{00}, \ j = 1, 2, \ldots, \tag{114}$$

$$\pi_{1j} = \frac{\lambda_0}{\mu} \frac{1}{j!\nu^j} \prod_{i=1}^{j} \frac{\lambda_{i-1}(\lambda_i + i\nu)}{\lambda_i + i\nu + \mu} \pi_{00}, \ j = 0, 1, \ldots, \tag{115}$$

де

$$\pi_{00}^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!\nu^j} \prod_{i=1}^{j} \frac{\lambda_{i-1}(\lambda_{i-1} + (i-1)\nu)}{\lambda_i + i\nu + \mu} + \frac{\lambda_0}{\mu} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!\nu^j} \prod_{i=1}^{j} \frac{\lambda_{i-1}(\lambda_i + i\nu)}{\lambda_i + i\nu + \mu}. \tag{116}$$

Доведення. Стаціонарні ймовірності π_{ij}, $(i, j) \in S(Q)$, $S(Q) = \{0,1\} \times \{0,1,\ldots\}$ задовольняють систему рівнянь (80), (92), (93). Для спрощення цієї системи використаємо рівняння (84), яке для $n = 1$ має вигляд

$$\lambda_j \pi_{1j} = (j+1)\nu \pi_{1\,j+1} + (j+1)\nu \pi_{0\,j+1}, \quad j = 0, 1, \ldots. \tag{117}$$

Враховуючи (117), рівняння (92) спрощується до

$$(\mu + j\nu)\pi_{1j} = \lambda_j \pi_{0j} + \lambda_{j-1}\pi_{1\,j-1}, \ j = 0, 1, \ldots. \tag{118}$$

Підставляючи в рівняння (118) $\pi_{1j} = \dfrac{1}{\mu}(\lambda_j + j\nu)\pi_{0j}$, $j = 0, 1, \ldots$, маємо рекурентне співвідношення для π_{0j}

$$j\nu(\lambda_j + j\nu + \mu)\pi_{0j} = \lambda_{j-1}(\lambda_{j-1} + (j-1)\nu)\pi_{0\,j-1}, \ j = 1, 2, \ldots \tag{119}$$

Розв’язком (119) є

$$\pi_{0j} = \frac{1}{j!\nu^j} \prod_{i=1}^{j} \frac{\lambda_{i-1}(\lambda_{i-1} + (i-1)\nu)}{\lambda_i + i\nu + \mu} \pi_{00}, \ j = 0, 1, \ldots.$$

Звідси для π_{1j} маємо

$$\pi_{1j} = \frac{1}{\mu}(\lambda_j + j\nu)\pi_{0j} = \frac{\lambda_0}{\mu}\frac{1}{j!\nu^j}\prod_{i=1}^{j}\frac{\lambda_{i-1}(\lambda_i + i\nu)}{\lambda_i + i\nu + \mu}\pi_{00}, \ j = 0, 1, \ldots.$$

Ймовірність π_{00} знаходимо з умови нормування (93). В результаті ми отримали формули (114)–(116). Теорему доведено.

У випадку двоканальних систем масового обслуговування можна побудувати формули для стаціонарних ймовірностей π_{ij} , $(i, j) \in S(Q)$, $S(Q) = \{0, 1, 2\} \times \{0, 1, \ldots\}$ з використанням ланцюгових дробів.

Введемо позначення:

– для нескінченного ланцюгового дробу

$$x_j = \cfrac{\gamma_{j+1}}{\beta_{j+1} + \cfrac{\gamma_{j+2}}{\beta_{j+2} + \cfrac{\gamma_{j+3}}{\beta_{j+3} + \ldots \cfrac{}{\ldots + \cfrac{\gamma_{N-1}}{\beta_{N-1} + \ldots}}}}} = \left[0; \frac{\gamma_{j+1}}{\beta_{j+1}}; \frac{\gamma_{j+2}}{\beta_{j+2}}; \ldots\right], \ j = 0, 1, \ldots,$$

де

$$\gamma_j = -\frac{\lambda_{j-1}((\lambda_{j-1} + (j-1)\nu)^2 + (j-1)\nu\mu)}{j(j+1)\nu^2\mu}, \ j = 1, 2, \ldots, \tag{120}$$

$$\beta_j = -\frac{j\nu((\lambda_j + \mu + j\nu)^2 + \mu(\lambda_{j-1} + \mu + j\nu))}{j(j+1)\nu^2\mu}, \ j = 1, 2, \ldots; \tag{121}$$

– для скінченного ланцюгового дробу

$$x_j(N) = \cfrac{\gamma_{j+1}}{\beta_{j+1} + \cfrac{\gamma_{j+2}}{\beta_{j+2} + \cfrac{\gamma_{j+3}}{\beta_{j+3} + \ldots \cfrac{}{\ldots + \cfrac{\gamma_{N-1}}{\beta_{N-1} + \cfrac{\tilde{\gamma}_N}{\tilde{\beta}_N}}}}}} = \left[0; \frac{\gamma_{j+1}}{\beta_{j+1}}; \ldots; \frac{\gamma_{N-1}}{\beta_{N-1}}; \frac{\tilde{\gamma}_N}{\tilde{\beta}_N}\right], \ j = 0, 1, \ldots, N-1,$$

де

$$\tilde{\gamma}_N = \lambda_{N-1}((\lambda_{N-1} + (N-1)\nu)^2 + (N-1)\nu\mu),$$

$$\tilde{\beta}_N = N\nu((\lambda_N + \mu + N\nu)^2 + \mu(\lambda_{N-1} + \mu + N\nu)).$$

Теорема 8. Якщо виконуються умови Наслідку 6, то стаціонарні ймовірності π_{ij}, $(i, j) \in S(Q)$ системи типу $[M_Q | M | 2 | \infty]$ з однією повторною спробою мають вигляд:

$$\pi_{0j} = \left(\prod_{k=0}^{j-1} x_k\right)\pi_{00}, \; j = 1, 2, ..., \tag{122}$$

$$\pi_{1j} = \frac{\lambda_j + j\nu}{\mu}\left(\prod_{k=0}^{j-1} x_k\right)\pi_{00}, \; j = 0, 1, ..., \tag{123}$$

$$\pi_{2j} = \frac{1}{2\mu^2}((\lambda_j + j\nu)^2 + j\nu\mu - (j+1)\nu\mu\, x_j)\left(\prod_{k=0}^{j-1} x_k\right)\pi_{00}, \; j = 0, 1, ..., \tag{124}$$

де

$$(\pi_{00})^{-1} = \frac{1}{2\mu^2}\left(\sum_{j=0}^{\infty}\left((\lambda_j + \mu + j\nu)^2 + \mu(\mu + j\nu - (j+1)\nu\, x_j)\right)\left(\prod_{k=0}^{j-1} x_k\right)\right). \tag{125}$$

Доведення.

Знайдемо спочатку стаціонарні ймовірності $\pi_{ij}(N)$, $i = 0, 1, 2$, $j = 0, 1, ..., N$ для урізаної моделі $[M_Q | M | 2 | \infty]$. Використовуючи рівняння (85), (89), подамо $\pi_{1j}(N)$ через $\pi_{0j}(N)$:

$$\pi_{1j}(N) = \frac{\lambda_j + j\nu}{\mu}\pi_{0j}(N), \; j = 0, 1, ..., N. \tag{126}$$

Рівняння (126) дає можливість переписати (86) у вигляді

$$2\mu^2\pi_{2j}(N) = ((\lambda_j + j\nu)^2 + j\nu\mu)\pi_{0j}(N) - (j+1)\nu\mu\pi_{0j+1}(N), \; j = 0, 1, ..., N-1, \tag{127}$$

а рівняння (90) для $i = 1$ – у вигляді

$$2\mu^2\pi_{2N}(N) = ((\lambda_N + N\nu)^2 + N\nu\mu)\pi_{0N}(N). \tag{128}$$

З (127), (128) і рівняння (91) для $n = 2$, знаходимо

$$\lambda_{N-1}((\lambda_{N-1} + (N-1)\nu)^2 + (N-1)\nu\mu)\pi_{0N-1}(N) =$$

$$= N\nu((\lambda_N + \mu + N\nu)^2 + \mu(\lambda_{N-1} + \mu + N\nu))\pi_{0N}(N) \tag{129}$$

або

$$\tilde{\gamma}_N \pi_{0N-1}(N) = \tilde{\beta}_N \pi_{0N}(N), \tag{130}$$

де $\tilde{\gamma}_N$, $\tilde{\beta}_N$ визначені вище.

Використовуючи рівняння (88) для $n = 2$ та (126), подамо (87) у вигляді

$$(2\mu + j\nu)\pi_{2j}(N) = \frac{\lambda_j(\lambda_j + j\nu)}{\mu}\pi_{0j}(N) + \lambda_{j-1}\pi_{2j-1}(N) - (j+1)\nu\pi_{0j+1}(N), \tag{131}$$

$$j = 0, 1, ..., N-1.$$

Поєднуючи (131) і (127), отримаємо рекурентне співвідношення для π_{0j}, $j = 1, 2, ..., N-1$

$$\gamma_j \pi_{0j-1}(N) = \beta_j \pi_{0j}(N) + \pi_{0j+1}(N), \tag{132}$$

де γ_j, β_j, $j = 1, 2, ..., N-1$ визначені у (120), (121).

Ліву та праву частину рівняння (132) поділимо на $\pi_{0j}(N)$, а в рівнянні (130) – на $\pi_{0N-1}(N)$. Перейшовши до нової змінної $x_j(N) = \dfrac{\pi_{0j+1}(N)}{\pi_{0j}(N)}$, $j = 0, 1, ..., N-1$, маємо:

$$\frac{\gamma_j}{x_{j-1}(N)} = \beta_j + x_j(N), \quad j = 1, 2, ..., N-1, \tag{133}$$

$$x_{N-1}(N) = \frac{\tilde{\gamma}_N}{\tilde{\beta}_N}. \tag{134}$$

Рекурентні співвідношення (133), (134) дають можливість записати стаціонарні ймовірності $\pi_{0j}(N)$, $j = 0, 1, ..., N-1$ через ланцюгові дроби $x_j(N)$, $j = 0, 1, ..., N-1$ у вигляді

$$\pi_{0j}(N) = \left(\prod_{k=j}^{N-1} x_k(N)\right)^{-1} \pi_{0N}(N), \quad j = 0, 1, ..., N-1. \tag{135}$$

Використовуючи (135) для $j = 0$, подамо $\pi_{0N}(N)$ через $\pi_{00}(N)$

$$\pi_{0N}(N) = \left(\prod_{k=0}^{N-1} x_k(N)\right)\pi_{00}(N). \tag{136}$$

В результаті маємо формули для $\pi_{0j}(N)$ та $\pi_{1j}(N)$, $j = 0, 1, ..., N$, які залежать тільки від $\pi_{00}(N)$:

$$\pi_{0j}(N) = \left(\prod_{k=0}^{j-1} x_k(N)\right)\pi_{00}(N),\ j = 1, 2, ..., N, \tag{137}$$

$$\pi_{1j}(N) = \frac{\lambda_j + j\nu}{\mu}\left(\prod_{k=0}^{j-1} x_k(N)\right)\pi_{00}(N),\ j = 0, 1, ..., N. \tag{138}$$

Отримані ймовірності $\pi_{0j}(N)$, $j = 1,..., N$, використаємо в рівняннях (127), (128). Це дозволяє знайти стаціонарні ймовірності $\pi_{2j}(N)$, $j = 0, 1, ..., N$:

$$\pi_{2j}(N) = \frac{1}{2\mu^2}\left((\lambda_j + j\nu)^2 + j\nu\mu - (j+1)\nu\mu x_j(N)\right)\left(\prod_{k=0}^{j-1} x_k(N)\right)\pi_{00}(N), \tag{139}$$

$$j = 0, 1, ..., N-1,$$

$$\pi_{2N}(N) = \frac{(\lambda_N + N\nu)^2 + N\nu\mu}{2\mu^2}\left(\prod_{k=0}^{N-1} x_k(N)\right)\pi_{00}(N). \tag{140}$$

З умови нормування $\sum_{j=0}^{N}\left(\pi_{0j}(N) + \pi_{1j}(N) + \pi_{2j}(N)\right) = 1$ маємо

$$\left(\pi_{00}^{N}\right)^{-1} =$$

$$= \frac{1}{2\mu^2}\left(\sum_{j=0}^{N}\left((\lambda_j + \mu + j\nu)^2 + \mu(\mu + j\nu)\right)\left(\prod_{k=0}^{j-1} x_k(N)\right) - \sum_{j=0}^{N-1}(j+1)\nu\mu x_j(N)\left(\prod_{k=0}^{j-1} x_k(N)\right)\right). \tag{141}$$

Як було зазначено вище, процеси обслуговування $Q(t)$ і $Q(t, N)$ є процесами міграції і тому при $N \to \infty$ стаціонарні ймовірності $\pi_{ij}(N)$ урізаної $[M_Q | M | 2 | N]$- моделі наближають стаціонарні ймовірності π_{ij} $[M_Q | M | 2 | \infty]$-моделі

$$\lim_{N \to \infty} \pi_{ij}(N) = \pi_{ij}. \tag{142}$$

Тепер у формулах (137) – (141) можна перейти до границі при $N \to \infty$. Як результат маємо (122) – (125). Теорема доведена.

У випадку систем з багатьма приладами $n \geq 2$ стаціонарні ймовірності можна подати у векторно-матричному вигляді.

Для цього введемо позначення:

$$e_1 = \underbrace{(1,0,\dots,0)}_{n+1}{}^T \;;\; \overline{1}(i) = \underbrace{(1,1,\dots,1)}_{i}{}^T;$$

$$\pi_j(N) = \left(\pi_{0j}(N), \pi_{1j}(N), \dots, \pi_{nj}(N)\right)^{\mathrm{T}}, \; j = 0, 1, \dots, N;$$

$$\pi_j = \left(\pi_{0j}, \pi_{1j}, \dots, \pi_{nj}\right)^T, \; j = 0, 1, \dots;$$

$$F(j) = \left\| f_{ik}^{j} \right\|_{i,k=0}^{n}, \; j = 0, 1, \dots, \text{ де } f_{ik}^{j} = \begin{cases} \lambda_j + i\mu + j\nu, & k = i, \; i = 0, 1, \dots, n-1, \\ \lambda_j + n\mu, & k = i = n, \\ -\lambda_j, & k = i-1, \; i = 1, 2, \dots, n-1, \\ -(\lambda_j + j\nu), & i = n, \; k = n-1, \\ -(i+1)\mu, & k = i+1, \; i = 0, 1, \dots, n-1, \\ -j\nu, & i = n, \; k = 0, 1, \dots, n-2, \\ 0, & \text{в іншому випадку;} \end{cases}$$

$$B = \left\| b_{ik} \right\|_{i,k=0}^{n}, \text{ де } b_{ik} = \begin{cases} 1, & k = i-1, \; i = 1, 2, \dots, n, \\ 1, & k = i = n, \\ 0, & \text{в іншому випадку;} \end{cases}$$

$$D = \left\| d_{ik} \right\|_{i,k=0}^{n}, \text{ де } d_{ik} = \begin{cases} 1, & i = 0, k = 0, \\ 0, & i = 0, k = 1, 2, \dots, n, \\ f_{i-1k}^{N}, & i = 1, 2, \dots, n, \; k = 0, 1, \dots, n; \end{cases}$$

$$W(j) = F^{-1}(j)B, \; \prod_{k=j}^{r} W(k) = W(j)W(j+1) \times \dots \times W(r).$$

Для матриць $F(j), \quad j = 0, 1, \dots$ та D справедливим є такий допоміжний результат.

Лема 6. Якщо параметри моделі невироджені, то існують обернені матриці $F^{-1}(j), \quad j = 0,1,\dots$ та D^{-1}.

Доведення спирається на ті ж аргументи, що були використані в Лемі 2.

Тепер вектор стаціонарних ймовірностей

$$\pi_j(N) = \left(\pi_{0j}(N), \pi_{1j}(N), \dots, \pi_{nj}(N)\right)^T$$

можна подати через параметри моделі у векторно-матричній формі.

Теорема 9. Якщо параметри невироджені, то стаціонарні ймовірності $\pi_{ij}(N)$, $(i, j) \in S(Q(N))$ для системи типу $[M_Q | M | n | N]$ з однією повторною спробою можна подати у векторно-матричному вигляді:

$$\pi_j(N) = \Delta_j(N)\pi_{00}(N), \; j = 0, 1, \ldots, N,$$

де

$$\pi_{00}(N) = \left(\sum_{j=0}^{N} \overline{1}^T(n)\Delta_j(N) \right)^{-1}, \; \Delta_j(N) = \frac{1}{j!\nu^j} \frac{\prod_{k=j}^{N-1} W(k)D^{-1}e_1}{e_1^T \prod_{k=0}^{N-1} W(k)D^{-1}e_1}, \; j = 0, 1, \ldots, N-1,$$

$$\Delta_N(N) = \frac{1}{N!\nu^N} \frac{D^{-1}e_1}{e_1^T \prod_{k=0}^{N-1} W(k)D^{-1}e_1}.$$

Доведення. Додамо до системи рівнянь (89), (90) рівність $\pi_{0N}(N) = \pi_{0N}(N)$ та запишемо систему у векторно-матричному вигляді

$$D\pi_N(N) = e_1\pi_{0N}(N).$$

Це дає можливість подати $\pi_N(N)$ через $\pi_{0N}(N)$

$$\pi_N(N) = D^{-1}e_1\pi_{0N}(N). \tag{143}$$

Якщо в рівнянні (88) замінити j на $j-1$, то (87) можна переписати у вигляді

$$(\lambda + c\mu)\pi_{cj}(N) = (\lambda_j + j\nu)\pi_{c-1j}(N) + (j+1)\nu\pi_{1j+1}(N) + (j+1)\nu\pi_{2j+1}(N) +$$

$$+ j\nu\pi_{0j}(N) + \ldots + j\nu\pi_{n-2j}(N), \; j = 0, 1, \ldots, N-1. \tag{144}$$

Подамо тепер системи (85), (86) та (144) у векторно-матричному вигляді

$$F(j)\pi_j(N) = (j+1)\nu B\pi_{j+1}(N), \; j = 0, 1, \ldots, N-1. \tag{145}$$

Враховуючи (143), знаходимо розв’язок рекурентного співвідношення (145)

$$\pi_j(N) = \frac{N!\nu^{N-j}}{j!} \prod_{k=j}^{N-1} W(k)D^{-1}e_1\pi_{0N}(N), \; j = 0, 1, \ldots, N-1.$$

Для $j = 0$ із останньої формули маємо

$$\pi_0(N) = N!\nu^N \prod_{k=0}^{N-1} W(k) D^{-1} e_1 \pi_{0N}(N). \tag{146}$$

З використанням (146) можна виписати ймовірність $\pi_{0N}(N)$ через $\pi_{00}(N)$:

$$\pi_{0N}(N) = \left[N!\nu^N e_1^T \prod_{k=0}^{N-1} W(k) D^{-1} e_1 \right]^{-1} \pi_{00}^N .$$

Таким чином,

$$\pi_j(N) = \Delta_j(N) \pi_{00}(N), \; j = 0, \ldots, N . \tag{147}$$

де

$$\Delta_j(N) = \frac{1}{j!\nu^j} \frac{\prod_{k=j}^{N-1} W(k) D^{-1} e_1}{e_1^T \prod_{k=0}^{N-1} W(k) D^{-1} e_1}, \quad j = 0, 1, \ldots, N-1,$$

$$\Delta_N(N) = \frac{1}{N!\nu^N} \frac{D^{-1} e_1}{e_1^T \prod_{k=0}^{N-1} W(k) D^{-1} e_1}. \tag{148}$$

З умови нормування знаходимо

$$\pi_{00}(N) = \left(\sum_{j=0}^{N} \bar{1}^T (n+1) \Delta_j(N) \right)^{-1} . \tag{149}$$

Теорема доведена.

Безпосереднім наслідком доведеного результату є векторне-матричне подання стаціонарних ймовірностей для $[M_Q \,|\, M \,|\, n \,|\, \infty]$- моделі.

Теорема 10. Якщо виконуються умови Наслідку 6, то стаціонарні ймовірності π_{ij}, $(i, j) \in S(Q)$ системи типу $[M_Q \,|\, M \,|\, n \,|\, \infty]$ з однією повторною спробою визначаються наступним чином:

$$\pi_j = \Delta_j \pi_{00}, \; j = 0, 1, \ldots, \tag{150}$$

де

$$\pi_{00} = \left(\sum_{j=0}^{\infty} \overline{1}^T (n+1) \Delta_j \right)^{-1}, \; \Delta_j = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{j! \nu^j} \frac{\prod_{k=j}^{N-1} W(k) D^{-1} e_1}{e_1^T \prod_{k=0}^{N-1} W(k) D^{-1} e_1}.$$

Формули (147) – (150) є ефективним алгоритмом підрахунку стаціонарних ймовірностей для системи типу $[M_Q \mid M \mid n \mid \infty]$.

Результати теорем 6–10 можна використовувати при розв’язанні задач максимізації прибутку від роботи системи у випадку порогових стратегій керування.

5.2. DECISION MAKING OF OPTIMAL CONTROL STRATEGY

Змінний характер інтенсивності вхідного потоку у моделі, що розглядається, дає можливість ставити і розв’язувати для них оптимізаційні задачі подібні до тих, що розглядалися у третій частині. У зв’язку з цим розглянемо клас багатопорогових стратегій, які задаються порогами

$$0 = H_0 \le H_1 \le \ldots \le H_{M-1} < H_M = \infty, \; H = (H_1, H_2, \ldots, H_{M-1})^{\mathrm{T}},$$

M – фіксоване число. Якщо в момент часу $t \ge 0$ число джерел повторних викликів лежить в інтервалі $[H_{i-1}, H_i),\ i = 1, \ldots, M$, то система функціонує в i-у режимі та інтенсивність вхідного потоку системи дорівнює h_i. Якщо кількість джерел повторних викликів досягає H_i, то система переходить у наступний режим з інтенсивністю вхідного потоку h_{i+1} Інші параметри від режиму роботи не залежать.

Використання порогових стратегій дозволяє розв’язувати ряд економічних задач. Значна інтенсивність вхідного потоку приводить до збільшення черги повторних викликів, так званої орбіти. Завдяки цьому вимоги можуть залишати систему без обслуговування. Таким чином, доцільно зменшувати інтенсивність вхідного потоку. У випадку ж незначної інтенсивності вхідного потоку зменшуватиметься кількість вимог у зоні обслуговування та прилади будуть простоювати. Це в свою чергу впливатиме на економічні показники системи. Спираючись на ці аргументи треба збільшувати інтенсивність вхідного потоку.

Формально порогова стратегія H вказує на таку залежність λ_j від числа джерел повторних викликів

$$\lambda_j = \begin{cases} h_1,\ j = 0, \dots, H_1 - 1, \\ h_2,\ j = H_1, \dots, H_2 - 1, \\ \dots \\ h_M,\ j = H_{M-1}, \dots . \end{cases}$$

Задача оптимального керування системою з однією спробою повтору полягає у відшуканні таких значень порогів H_i, $i = 1, \dots, M - 1$, які є розв’язками багатокритеріальної задачі оптимізації. Така оптимізаційна задача вимагає наявності принаймні двох критеріїв якості. Наприклад, максимізувати прибуток і мінімізувати витрати. Можна розглядати багатокритеріальні задачі, що містять і більше критеріїв.

Перейдимо до постановки багатокритеріальної оптимізаційної задачі. Нехай

$S_i(t, H)$ – число вимог, обслуговування яких завершено за час t, при роботі системи в i-му режимі, $i = 1, \dots, M$;

$S_{M+1}(t, H)$ – число вимог, які отримали відмову в обслуговуванні та стали повторними викликами;

$S_{M+2}(t, H)$ – число перемикань інтенсивності вхідного потоку;

$S_{M+3}(t, H)$ – число вимог, які залишили систему без обслуговування після останньої невдалої повторної спроби.

Для системи з невиродженими параметрами існують границі $\lim_{t\to\infty} t^{-1} S_i(t, H)$, які будемо позначати через $S_i(H)$, $i = 1, \dots, M + 3$.

Формально оптимізаційну задачу можна подати у такому вигляді

$$\begin{gathered} S_i(H) \to \max,\ i = 1, 2, \dots, M, \\ S_{M+1}(H) \to \min, \\ S_{M+2}(H) \to \min, \\ S_{M+3}(H) \to \min, \end{gathered} \tag{151}$$

$$H_i \le H_{i+1}, \qquad H_i \in \{0, 1, \dots\},\ i = 1, 2, \dots, M - 1.$$

В якості основного підходу до розв’язку багатокритеріальної задачі (151) використаємо метод лінійної згортки. Цей метод приводить до оптимізаційної задачі

$$\sum_{i=1}^{M} C_i L_i(H) - C_{M+1} L_{M+1}(H) - C_{M+2} L_{M+2}(H) - C_{M+3} L_{M+3}(H) \to \max, \tag{152}$$

$$H_i \le H_{i+1}, \quad H_i \in \{0, 1, \dots\}, \quad i = 1, 2, \dots, M - 1,$$

де C_i – прибуток, пов'язаний з обслуговуванням однієї вимоги, при роботі в i-ому режимі, $i = 1, 2, ..., M$; C_{M+1} – штраф за відмову в обслуговуванні; C_{M+2} – штраф за перемикання інтенсивності вхідного потоку, C_{M+3}– штраф за втрату вимоги після останньої невдалої повторної спроби. Розв'язком задачі (152) є така багатопорогова стратегія H , яка максимізує середній прибуток від роботи системи.

Функціонали $S_i(H)$, $i = 1, 2, ..., M + 3$, можуть бути виписані через стаціонарні імовірності для процесу обслуговування:

$$S_i(H) = \mu \sum_{j=H_{i-1}}^{H_i-1} \sum_{k=1}^{n} k\pi_{kj}(H),\ i = 1, 2, ..., M-1,$$

$$S_M(H) = \mu \sum_{j=H_{M-1}}^{\infty} \sum_{k=1}^{n} k\pi_{kj}(H),$$

$$S_{M+1}(H) = \sum_{i=1}^{M} h_i \sum_{j=H_{i-1}}^{H_i-1} \pi_{nj}(H),$$

$$S_{M+2}(H) = \sum_{i=1}^{M-1}\left(h_i \pi_{nH_i-1}(H) + H_i \nu \sum_{k=0}^{n} \pi_{kH_i}(H) \right),$$

$$S_{M+3}(H) = \nu \sum_{j=1}^{\infty} j\pi_{nj}(H).$$

У випадку $M = 2$ маємо клас однопорогових стратегій і запис оптимізаційної задачі (152) дещо скорочується

$$S(H) = C_1 S_1(H) + C_2 S_2(H) - C_3 S_3(H) - C_4 S_4(H) - C_5 S_5(H) \to \max, \quad (153)$$

$$H \in \{0, 1, ...\}.$$

В свою чергу функціонали $S_i(H)$, $i = 1, ..., 5$ можна подати через стаціонарні ймовірності $[M_Q \mid M \mid n \mid \infty]$-системи таким чином:

$$S_1(H) = \mu \sum_{j=0}^{H-1} \sum_{k=1}^{n} k\pi_{kj}(H),$$

$$S_2(H) = \mu \sum_{j=H}^{\infty} \sum_{k=1}^{n} k\pi_{kj}(H),$$

$$S_3(H) = h_1 \sum_{j=0}^{H-1} \pi_{nj}(H) + h_2 \sum_{j=H}^{\infty} \pi_{nj}(H),$$

$$S_4(H) = h_1 \pi_{nH-1}(H) + H\nu \sum_{k=0}^{n} \pi_{kH}(H),$$

$$S_5(H) = \nu \sum_{j=1}^{\infty} j \pi_{nj}(H).$$

Для системи типу $[M_Q | M | 1 | \infty]$ з параметрами: $h_1 = 8$, $h_2 = 3$, $\mu = 5$, $\nu = 1$ у випадку керування інтенсивністю вхідного потоку в класі порогових стратегій при $M = 2$ та вартісними коефіцієнтами: $C_1 = 100$, $C_2 = 75$, $C_3 = 5$, $C_4 = 4$, $C_5 = 42$ встановлено, що при $H = 3$ досягається максимальне значення функціоналу $S(H) = 156{,}69$. На рис. 2 подано графік залежності функціоналу якості (153) від порогової стратегії керування H для системи, що розглядається.

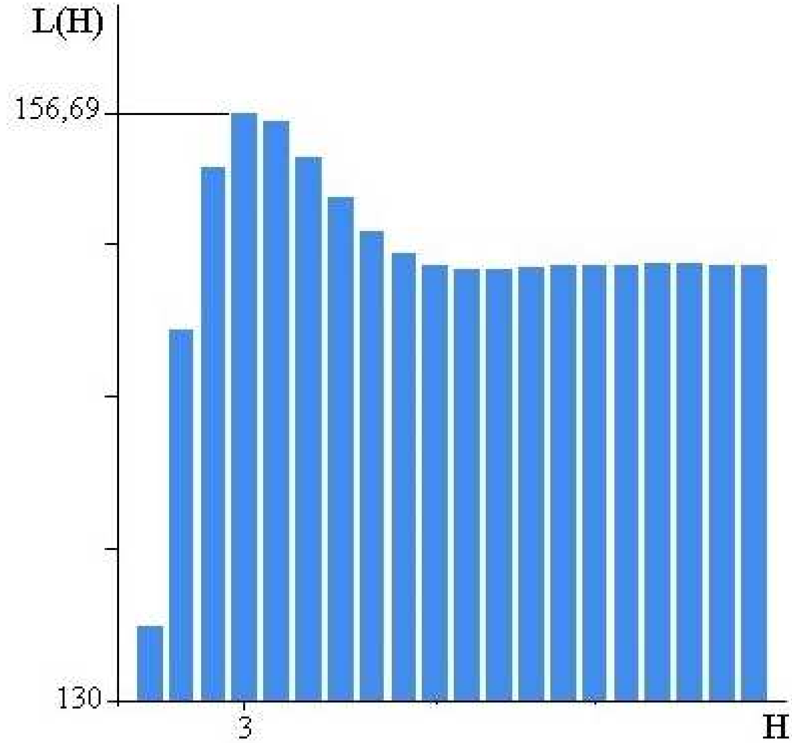


Рис. 2. Графік залежності функціоналу якості від стратегії керування

Для системи типу $[M_Q | M | 2 | \infty]$ з параметрами: $h_1 = 8$, $h_2 = 3$, $\mu = 3$, $\nu = 3$ у випадку керування інтенсивністю вхідного потоку в класі однопорогових стратегій з вартісними коефіцієнтами: $C_1 = 96$, $C_2 = 75$, $C_3 = 8$, $C_4 = 4$, $C_5 = 45$ максимальне значення функціоналу $S(H) = 251{,}42$ досягається при $H = 4$.

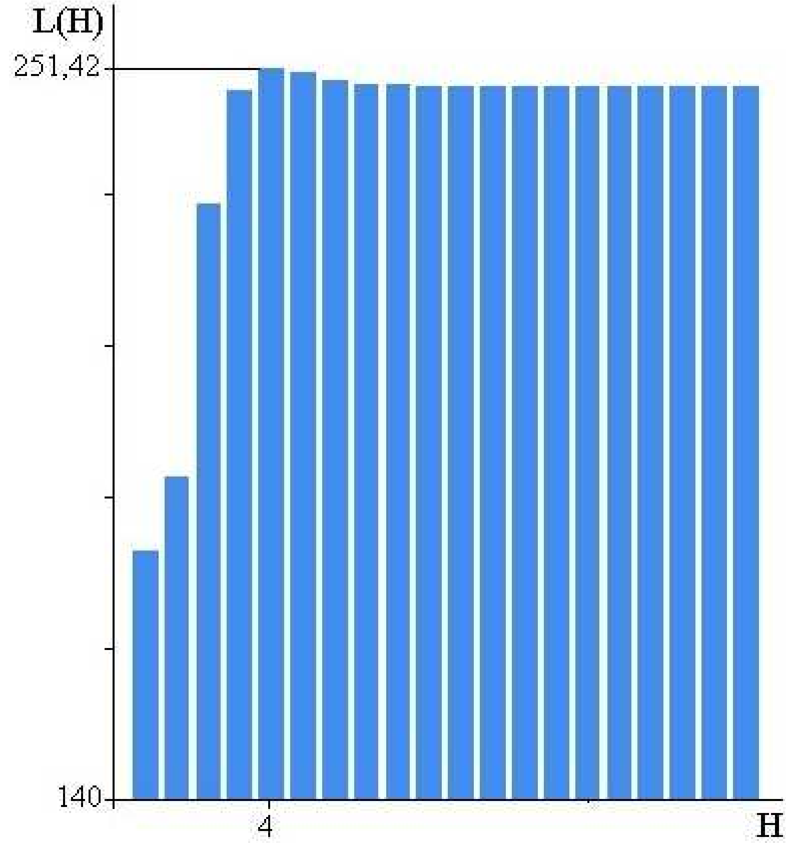


Рис. 3. Графік залежності функціоналу якості від стратегії керування.

6. RECURRENT CALCULATING SCHEMES FOR THE SYSTEMS WITH THE RESTRICTED NUMBER OF RETRIALS

Процес обслуговування для систем з двома та більше повторними спробами ускладнюється і це не дає можливість отримати стаціонарні ймовірності у вигляді явних формул. Тому варто використовувати альтернативу розрахунковим формулам, зокрема, рекурентні обчислювальні алгоритми, які використовувались для систем масового обслуговування інших типів.

Розглянемо багатоканальну систему масового обслуговування з однією спробою повтору та побудуємо для неї рекурентний обчислювальний алгоритм для стаціонарних імовірностей.

Раніше у Розділі 5.1 процес обслуговування для системи типу $[M_Q|M|n|\infty]$ з однією спробою повтору моделювався ланцюгом Маркова з неперервним часом $Q(t)=\left(Q_0(t),Q_1(t)\right)^T$, $t\geq 0$ в множині станів $S(Q)=\{0,1,...,n\}\times\{0,1,...\}$. Там же розглядалась урізана модель типу $[M_Q|M|n|N]$, яка має скінченну кількість місць для повторних викликів N. При умові, що всі прилади зайняті та існує N джерел повторних викликів, нові вимоги при надходженні втрачаються системою назавжди. Процес обслуговування даної системи моделюється ланцюгом Маркова з неперервним часом $Q(t,N)=\left(Q_0(t,N),Q_1(t,N)\right)^T$, $t\geq 0$ та множиною станів $S(Q(N))=\{0,1,...,n\}\times\{0,1,...,N\}$. Подамо множину станів у вигляді $S(Q(N))=S_0\cup S_1\cup...\cup S_N$, де $S_j=\{(0,\,j),(1,\,j),...,(n,\,j)\}$, $j=0,1,...,N$. Матриця інфінітезимальних характеристик ланцюга $Q(t,N)$ матиме вигляд блочної тридіагональної матриці розмірності $[(n+1)(N+1)]\times[(n+1)(N+1)]$:

$$A=\begin{pmatrix} B_0 & D_0 & & & & \\ C_1 & B_1 & D_1 & & & \\ & C_2 & B_2 & D_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & B_{N-1} & D_{N-1} \\ & & & & C_N & B_N \end{pmatrix}, \tag{154}$$

де B_j, $j=0,1,...,N$, C_j, $j=1,2,...,N$, D_j, $j=0,1,...,N-1$ – матриці розмірності $(n+1)\times(n+1)$, що визначаються наступним чином:

$B_j=\left\|b_{ik}^j\right\|_{i,k=0}^n$, де $b_{ii}^j=-(\lambda_j+i\mu+j\nu)$, $i=0,1,...,n$, $j=0,1,...,N-1$ $b_{ii}^N=-(\lambda_N+i\mu+N\nu)$, $i=0,1,...,n-1$, $b_{nn}^N=-(n\mu+N\nu)$, $b_{ii-1}^j=i\mu$, $i=1,2,...,n$, $j=0,1,...,N$, $b_{ii+1}^j=\lambda_j$, $i=0,1,...,n-1$, $j=0,1,...,N$, інші елементи дорівнюють нулю;

$C_j=\left\|c_{ik}^j\right\|_{i,k=0}^n$, де $c_{ii+1}^j=j\nu$, $i=0,1,...,n-1$, $c_{nn}^j=j\nu$, $j=1,2,...,N$, інші елементи дорівнюють нулю;

$D_j=\left\|d_{ik}^j\right\|_{i,k=0}^n$, де $d_{nn}^j=\lambda_j$, $j=0,1,...,N-1$, інші елементи дорівнюють нулю.

Отже, $Q(t,N)=\left(Q_0(t,N),Q_1(t,N)\right)^T$, $t\geq 0$ є процесом квазі народження та загибелі з матрицею інфінітезимальних характеристик A. Будемо називати $Q_0(t,N)$ – фазою, а $Q_1(t,N)$ – рівнем. Це дозволяє поширити рекурентний обчислювальний алгоритм для процесів квазі народження та загибелі зі скінченною множиною станів на системи з однією спробою повтору. Методи, що базуються на теорії процесів квазі народження та загибелі широко використовуються для дослідження систем масового обслуговування. У даному розділі будемо використовувати результати Л. Брайта і П. Г. Тейлора [09].

Введемо позначення:

$\overline{1}(i)$ – вектор-стовпець розмірності i, що складається з одиниць;

O_i – матриця розмірності $i \times i$, елементи якої є нулями;

$\overline{0}(i)$ – вектор-стовпець розмірності i, що складається з нулів.

Позначимо через $\pi(N) = (\pi_0(N), \pi_1(N), ..., \pi_N(N))^T$, $\pi_j(N) = (\pi_{0j}(N), \pi_{1j}(N), ..., \pi_{nj}(N))^T$ вектори, складені із стаціонарних імовірностей. Вектор $\pi(N)$ задовольняє наступну систему рівнянь:

$$(\pi(N))^T A = \overline{0}^T((c+1)(N+1)), \tag{155}$$

$$(\pi(N))^T \overline{1}((c+1)(N+1)) = 1.$$

Скористаємося результатами роботи [09]. У відповідності до цих результатів необхідно побудувати сімейство матриць $\{R_j, j \geq 0\}$, які є мінімальними невід’ємними розв’язками системи рівнянь

$$D_j + R_j B_{j+1} + R_j R_{j+1} C_{j+2} = \mathrm{O}_{n+1}, \ j = 0, 1, ..., N-1. \tag{156}$$

Тоді стаціонарні ймовірності визначаються через введені матриці R_j, $j = 0, 1, ..., N-1$ формулами

$$(\pi_j(N))^T = (\pi_0(N))^T \prod_{k=0}^{j-1} R_k, \ j = 1, 2, ..., N, \tag{157}$$

і умовою нормування

$$(\pi_0(N))^T \overline{1}(n+1) + (\pi_0(N))^T \left(\sum_{i=1}^{N} \prod_{k=0}^{i-1} R_k \right) \overline{1}(n+1) = 1. \tag{158}$$

Використовуючи (156), для побудови матриць R_j, $j = 0, 1, ..., N-2$ отримаємо рекурентне співвідношення

$$R_j = D_j (-B_{j+1} - R_{j+1} C_{j+2})^{-1}, \quad j = 0, 1, ..., N-2. \tag{159}$$

Із останнього рівняння системи (158) маємо

$$R_{N-1} = -D_{N-1} (B_N)^{-1}. \tag{160}$$

Для знаходження вектора стаціонарних ймовірностей $\pi_0(N)$ скористаємося першим рівнянням системи (155), тобто

$$(\pi_0(N))^T (B_0 + R_0 C_1) = \overline{0}^T (n+1) \tag{161}$$

та умовою нормування (158).

Підводячи підсумок, подамо алгоритм пошуку стаціонарного розподілу $\pi(N)$.

Алгоритм 1.

1) Будуємо матриці B_j, $j = 0, 1, ..., N$, C_j, $j = 1, 2, ..., N$, D_j, $j = 0, 1, ..., N-1$, за параметрами системи;
2) знаходимо матрицю $R_{N-1} = -D_{N-1}\left(B_N\right)^{-1}$;
3) знаходимо матриці
$$R_i = D_i\,(-B_{i+1} - R_{i+1}C_{i+2})^{-1},\ i = N-2, N-3, ..., 0;$$
4) знаходимо $\pi_0(N)$ з рівняння
$$\left(\pi_0(N)\right)^T \left(B_0 + R_0 C_1\right) = \overline{0}^T(n+1)$$
та умови нормування
$$\left(\pi_0(N)\right)^T \overline{1}(n+1) + \left(\pi_0(N)\right)^T \left(\sum_{i=1}^{N}\prod_{k=0}^{i-1} R_k\right)\overline{1}(n+1) = 1;$$
5) знаходимо стаціонарні ймовірності
$$\left(\pi_j(N)\right)^T = \left(\pi_0(N)\right)^T \prod_{k=0}^{j-1} R_k,\ j = 1, 2, ..., N.$$

Тепер покажемо можливість перенесення розвинутого алгоритму на системи з більшим числом повторних спроб. Розглянемо багатоканальну стохастичну систему типу $[M_Q \,|\, M \,|\, n \,|\, \infty]$ з двома повторними спробами. Формально функціонування системи було описано вище. Нагадаємо, що якщо при другій повторній спробі всі прилади зайняті, то вимога залишає систему без обслуговування. Стан системи в момент часу t описується ланцюгом Маркова з неперервним часом $Q(t) = \left(Q_0(t), Q_1(t), Q_2(t)\right)^T \in S(Q)$, $t \geq 0$. Інфінітезимальні характеристики $Q(t)$ визначаються формулами (74), (75) при $m = 2$.

У даному випадку неможливо подати стаціонарні ймовірності π_{i,j_1,j_2}, $i = 1, 2, ..., n$, $j_k \in Z_+$, $k = 1, 2$ $\left(i, j_1, j_2\right) \in S(Q)$ в явному вигляді, тому використаємо метод урізання фазового простору та розглянемо відповідну урізану систему.

Процес обслуговування $Q(t,N)=\left(Q_0(t,N),Q_1(t,N),Q_2(t,N)\right)^T$ в урізаній моделі, що відповідає системі типу $[M_Q\,|\,M\,|\,n\,|\,N]$ з двома повторними спробами, має обмежене числом N кількість місць для вимог, які зробили одну або дві невдалі спроби отримати обслуговування.

Для даного процесу інфінітезимальні характеристики $a_{\beta'}^{\beta}(N)$, $\beta=(i,\,j_1,\,j_2)$, $\beta'=(i',\,j_1',\,j_2')$, $\beta,\beta'\in S(N)$ виписуються через параметри системи таким чином.

1) Якщо $i=0,1,\ldots,n-1$, $j_1,\,j_2=0,1,\ldots,N$, то

$$a_{\beta'}^{\beta}(N)=\begin{cases}\lambda_{j_1,j_2}, & \text{при } \beta'=(i+1,\,j_1,\,j_2),\\ i\mu, & \text{при } \beta'=(i-1,\,j_1,\,j_2),\\ j_1\nu_1, & \text{при } \beta'=(i+1,\,j_1-1,\,j_2),\\ j_2\nu_2, & \text{при } \beta'=(i+1,\,j_1,\,j_2-1),\\ -(\lambda_{j_1,j_2}+i\mu+j_1\nu_1+j_2\nu_2), & \text{при } \beta'=(i,\,j_1,\,j_2),\\ 0, & \text{в іншому випадку.}\end{cases}$$

2) Якщо $i=n$, $j_1,\,j_2=0,1,\ldots,N-1$, то

$$a_{\beta'}^{\beta}(N)=\begin{cases}\lambda_{j_1,j_2}, & \text{при } \beta'=(n,\,j_1+1,\,j_2),\\ n\mu, & \text{при } \beta'=(n-1,\,j_1,\,j_2),\\ j_1\nu_1, & \text{при } \beta'=(n,\,j_1-1,\,j_2+1),\\ j_2\nu_2, & \text{при } \beta'=(n,\,j_1,\,j_2-1),\\ -(\lambda_{j_1,j_2}+n\mu+j_1\nu_1+j_2\nu_2), & \text{при } \beta'=(i,\,j_1,\,j_2),\\ 0, & \text{в іншому випадку.}\end{cases}$$

3) Якщо $i=n$, $j_1=0,1,\ldots,N-1$, $j_2=N$, то

$$a_{\beta'}^{\beta}(N)=\begin{cases}\lambda_{j_1,N}, & \text{при } \beta'=(n,\,j_1+1,\,N),\\ n\mu, & \text{при } \beta'=(n-1,\,j_1,\,N),\\ j_1\nu_1, & \text{при } \beta'=(n,\,j_1-1,\,N),\\ N\nu_2, & \text{при } \beta'=(n,\,j_1,\,N-1),\\ -(\lambda_{j_1,N}+n\mu+j_1\nu_1+N\nu_2), & \text{при } \beta'=(n,\,j_1,\,N),\\ 0, & \text{в іншому випадку.}\end{cases}$$

4) Якщо $i=n$, $j_1=N$, $j_2=0,1,\ldots,N-1$, то

$$a_{\beta'}^{\beta}\left(N\right)=\begin{cases} n\mu, & \text{при } \beta'=(n-1,\, N,\, j_2), \\ N\nu_1, & \text{при } \beta'=(n,\, N-1,\, j_2+1), \\ j_2\nu_2, & \text{при } \beta'=(n,\, N,\, j_2-1), \\ -(n\mu+N\nu_1+j_2\nu_2), & \text{при } \beta'=(n,\, N,\, j_2), \\ 0, & \text{в іншому випадку.} \end{cases}$$

5) Якщо $\beta=\left(n,\, N,\, N\right)$, то

$$a_{\beta'}^{\beta}\left(N\right)=\begin{cases} n\mu, & \text{при } \beta'=(n-1,\, N,\, N), \\ N\nu_1, & \text{при } \beta'=(n,\, N-1,\, N), \\ N\nu_2, & \text{при } \beta'=(n,\, N,\, N-1), \\ -(n\mu+N\nu_1+N\nu_2), & \text{при } \beta'=(n,\, N,\, N), \\ 0, & \text{в іншому випадку.} \end{cases}$$

Подамо множину станів ланцюга Маркова $Q\left(t,N\right)$ у вигляді $S(Q(N))=S_0(N)\cup S_1(N)\cup\ldots\cup S_N(N)$, де $S_j(N)=\left\{i,k,\, j):i=0,1,\ldots,n;\; k=0,1,\ldots,N\right\}$, $j=0,1,\ldots,N$. Впорядкуємо стани (i,k) для $i=0,1,\ldots,n$ та $k=0,1,\ldots,N$ у зворотньому лексикографічному порядку, тобто

$$(0,0),(1,0),\ldots,(n,0),(0,1),(1,1),\ldots,(n,1),\ldots,(0,N),(1,N),\ldots,(n,N).$$

Тоді для процесу обслуговування $Q\left(t,N\right)=\left(Q_0\left(t,N\right),Q_1\left(t,N\right),Q_2\left(t,N\right)\right)^T$ інфінітезимальну матрицю можна подати у формі (154), яка відповідає розбиттю множини станів $S(Q(N))=S_0(N)\cup S_1(N)\cup\ldots\cup S_N(N)$ і має розмірність $\left[(n+1)(N+1)^2\right]\times\left[(n+1)(N+1)^2\right]$.

Матриці B_j, $j=0,1,\ldots,N$, C_j, $j=1,2,\ldots,N$, D_j, $j=0,1,\ldots,N-1$ – це квадратні матриці розмірності $\left[(n+1)(N+1)\right]\times\left[(n+1)(N+1)\right]$, які мають такий вигляд: $B_j=\left\|B_{j,k,l}\right\|_{k,l=0}^{N}$ – тридіагональні блочні матриці, де $B_{j,k,l}$, $k,l=0,1,\ldots,N$ – матриці розмірності $\left(n+1\right)\times\left(n+1\right)$. Наддіагональні та піддіагональні блоки матриці B_j відповідно визначаються так:

при $k=0,1,\ldots,N-1$, $j=0,1,\ldots,N$

$$\left(B_{j,k,k+1}\right)_{ii'}=\begin{cases}\lambda_{kj}, & \text{при } i=i'=n, \\ 0, & \text{в іншому випадку;}\end{cases}$$

при $k=1,2,\ldots,N$, $j=0,1,\ldots,N-1$

$$\left(B_{j,k,k-1}\right)_{ii'} = \begin{cases} k\nu_1, \text{ при } i' = i+1, \\ 0, \text{ в іншому випадку;} \end{cases}$$

при $k = 1, 2, ..., N$, $j = N$

$$\left(B_{N,k,k-1}\right)_{ii'} = \begin{cases} k\nu_1, \text{ при } i' = i+1, \\ k\nu_1, \text{ при } i' = i = n, \\ 0, \text{ в іншому випадку.} \end{cases}$$

Діагональні блоки $B_{j,k,k}$ такі:

при $k = 0, 1, ..., N-1$

$$\left(B_{j,k,k}\right)_{ii'} = \begin{cases} -\left(\lambda_{kj} + i\mu + k\nu_1 + j\nu_2\right), \text{ при } i = i' = 0, 1, ..., n, \\ i\mu, \text{ при } i' = i-1, \ i = 1, 2, ..., n, \\ \lambda_{kj}, \text{ при } i' = i+1, \ i = 0, 1, ..., n-1, \\ 0, \text{ в іншому випадку;} \end{cases}$$

при $k = N$

$$\left(B_{j,N,N}\right)_{ii'} = \begin{cases} -\left(\lambda_{Nj} + i\mu + N\nu_1 + j\nu_2\right), & \text{при } i = i' = 0, ..., n-1, \\ -\left(n\mu + N\nu_1 + j\nu_2\right), & \text{при } i = i' = n, \\ i\mu, & \text{при } i' = i-1, \ i = 1, ..., n, \\ \lambda_{Nj}, & \text{при } i' = i+1, \ i = 0, 1, ..., n-1, \\ 0, & \text{в іншому випадку.} \end{cases}$$

$D_j = \left\| D_{j,k,l} \right\|_{k,l=0}^{N}$ – це блочні матриці, де $D_{j,k,l}$, $k, l = 0, 1, ..., N$ – матриці розмірності $(n+1)\times(n+1)$, які визначаються наступним чином:

$$D_{j,k,l} = \mathbf{O}_{n+1}, \text{ якщо } l \neq k-1$$

та при $k = 1, 2, ..., N$

$$\left(D_{j,k,k-1}\right)_{ii'} = \begin{cases} k\nu_1, \text{ при } i = i' = n, \\ 0, \text{ в іншому випадку.} \end{cases}$$

$C_j = \left\| C_{j,k,l} \right\|_{k,l=0}^{N}$ – це блочні матриці, де $C_{j,k,l}$, $k, l = 0, 1, ..., N$ – матриці розмірності $(n+1) \times (n+1)$, які визначаються наступним чином:

$$C_{j,k,l} = \mathrm{O}_{n+1}, \text{ якщо } l \neq k$$

та

$$\left(C_{j,k,k}\right)_{ii'} = \begin{cases} j\nu_2, \text{ якщо } i' = i+1, \; i = 0, 1, ..., n-1, \\ j\nu_2, \text{ якщо } i' = i = n, \\ 0, \text{ в іншому випадку.} \end{cases}$$

Таким чином, за структурою інфінітезимальної матриці $Q(t, N)$ є процесом квазі народження та загибелі, де $\left(Q_0(t, N), Q_1(t, N)\right)$ – фаза, а $Q_2(t, N)$ – рівень.

Процес $Q(t, N)$ приймає значення в скінченній множині станів $S(Q(N))$ і має стаціонарний режим. Його стаціонарний розподіл позначимо як

$$\pi(N) = \left(\pi_0(N), \pi_1(N), ..., \pi_N(N)\right)^T, \text{ де } \pi_j(N) = \left(\pi_{0j}(N), \pi_{1j}(N), ..., \pi_{Nj}(N)\right)^T,$$

$$\pi_{kj}(N) = \left(\pi_{0kj}(N), \pi_{1kj}(N), ..., \pi_{nkj}(N)\right)^T,$$

$$\pi_{ikj}(N) = \lim_{t \to \infty} P\left\{Q_1(t, N) = i, Q_2(t, N) = k, Q_3(t, N) = j\right\}, \; (i, k, j) \in S(N).$$

Стаціонарні ймовірності задовольняють систему рівнянь:

$$(\pi(N))^T A = \overline{0}^T\left((n+1)(N+1)^2\right),$$

$$(\pi(N))^T \, \overline{1}\left((n+1)(N+1)^2\right) = 1.$$

Для знаходження стаціонарних ймовірностей $[M_Q \mid M \mid n \mid N]$ - системи скористаємося методом, що був описаний вище. За цим методом необхідно побудувати сімейство матриць $\left\{R_j, \; j = 0, 1, ..., N-1\right\}$ розмірності $[(n+1)(N+1)] \times [(n+1)(N+1)]$, які є розв’язком системи рівнянь

$$D_j + R_j B_{j+1} + R_j R_{j+1} C_{j+2} = \mathrm{O}_{(n+1)(N+1)}, \; j = 0, 1, ..., N-1.$$

Ці матриці визначаються рекурентним чином за формулами (159), (160). Щоб було коректним застосування цих формул, перевіримо, що існують обернені матриці $\left(-B_{j+1} - R_{j+1}C_{j+2}\right)^{-1}$, $j = 1, 2, ..., N-2$ та $\left(B_N\right)^{-1}$.

Лема 8. Якщо параметри λ_{j_1,j_2}, ν_k, μ є невиродженими, то існують обернені матриці $\left(-B_{j+1}-R_{j+1}C_{j+2}\right)^{-1}$, $j=1,2,...,N-2$, та $\left(B_N\right)^{-1}$.

Доведення. Доведемо існування оберненої матриці $\left(B_N\right)^{-1}$. Перевіримо умови Адамара ([20], с. 406) для рядків матриць B_N:

$$G_i^k=\left|\left(B_{N,k,k}\right)_{ii}\right|-\sum_{\substack{j=0\\ j\neq k}}^{N}\sum_{\substack{i=0\\ i\neq i'}}^{n}\left|\left(B_{N,k,j}\right)_{ii'}\right|>0.$$

Маємо:

$$G_i^k=\lambda_{kN}+i\mu+k\nu_1+N\nu_2-\lambda_{kN}-i\mu-k\nu_1=N\nu_2>0,$$

$$i=0,1,\ldots,n,\ k=0,1,...,N-1,$$

$$G_i^N=\lambda_{kN}+i\mu+N\nu_1+N\nu_2-\lambda_{kN}-i\mu-N\nu_1=N\nu_2>0,\ i=0,1,\ldots,n-1,\ k=N,$$

$$G_n^N=n\mu+\mathrm{N}\nu_1+N\nu_2-n\mu-N\nu_1=N\nu_2>0.$$

Таким чином, за теоремою Адамара ([20], с. 406) матриця B_N є невиродженою і має обернену $\left(B_N\right)^{-1}$.

Існування матриць $\left(-B_{i+1}-R_{i+1}C_{i+2}\right)^{-1}$, $i=1,...,N-2$ випливає з Леми 1 роботи [19]. Лема доведена.

Існування обернених матриць дає нам можливість поширити рекурентний обчислювальний Алгоритм 1 на системи з двома повторними спробами. Враховуючи розмірність попередньо визначених матриць, пункт 4) про знаходження $\pi_0(N)$ матиме вигляд:

$$\left(\pi_0(N)\right)^T\left(B_0+R_0C_1\right)=\overline{0}^T\left((c+1)(N+1)\right),$$

при умові нормування

$$\left(\pi_0(N)\right)^T\overline{1}\left((c+1)(N+1)\right)+\left(\pi_0(N)\right)^T\left(\sum_{i=1}^{N}\prod_{k=0}^{i-1}R_k\right)\overline{1}\left((c+1)(N+1)\right)=1.$$

Аналіз структури інфінітезимальних характеристик процесу обслуговування для систем з будь-яким числом “m” повторних спроб показує, що запропонований рекурентний алгоритм знаходження стаціонарних імовірностей може бути поширений і на системи з $m>2$.

References

[1] G.I. Falin and J.G.C. Templeton. Retrial queues. – Chapman $\wedge$ Hall, 1977. – 329 p.

[2] J.R. Artalejo, A. Gomez-Corral. Retrial queueing systems. – Springer-Verlag, 2008. – 317 p.

[3] Kovalenko I.N. Loss probability in the $M|G|m$- queue with T- repetition of calls in regime of small load // Reports of Ukrainian Academy of Sciences. – 2002. – N 5. – P. 77-80.

[4] Koba E.V., Kovalenko I.N. Ergodicity condition for the $M|G|1$- queue with retrial calls under nonlattice distribution of orbit cycle // Reports of Ukrainian Academy of Sciences. – 2004. – N 8. – P. 70-77.

[5] Mandelbaum A., Pats G. State – dependent queues: approximations and applications. – Haifa: Technion Institute, 1994. – 40 p.

[6] E.A. Lebedev, V.D. Ponomarev. On multi-channel queues with constant retrial rate // Reports of Ukrainian Academy of Sciences. – 2014. – N 7. – P. 15-23.

[7] E.A. Lebedev, I.Ya. Usar. On retrial queues with controlled input flow // Reports of Ukrainian Academy of Sciences. – 2009. – N 5. – P. 52-59.

[8] E.A. Lebedev, V.D. Ponomarev. Retrial queues with variable service rate // Cybernetics and Systems Analysis. – 2011. – Vol. 47. – N 3. – P. 434-441.

[9] Neuts M.F. Matrix – geometric solutions in stochastic models – an algorithmic approach. – Baltimore: Hohns Hopkins University Press, 1981.

[10] Choi B.D., Shin Y.W., Ahn W.C. Retrial queues with collision arising from unsoltted CSMA/CD protocol. – Queueing Systems 11, 1992, p. 335-356.

[11] Artalejo J.R. Stationary analysis of the characteristics of the M/M/2 queue with constant repeated attempts. - Opsearch 33, 1996, p. 83-95.

[12] Gomez-Corral A., Ramalhoto M.F. The stationary distribution of a Markovian process arising in the theory of multiserver retrial queueing systems. - Mathematical and Computer Modelling 30, 1999, p. 141-158.

[13] Falin G. Heavy traffic analysis of a random walk on a lattice semi-strip. – Stochastic Models, 11(3), 1995, p. 395-409.

[14] Roger A.H., Charles R.J. Matrix analysis. - Cambridge University Press, 1986 (chapter 8.5) .

[15] Klimenok, V.I. Optimization of dynamic control for a work regime of informational-computing systems with repeated calls // Automation and computing tehnology. – 1990. - N 1. – P. 25-30.

[16] Dudin, A.N. Klimenok, V.I. Optimization of dynamic control of input load in node of informational-computing network. Automation and computing tehnology. – 1991. - N 2. – P. 25-31.

[17] Walrand J. An introduction to queueing networks. Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1988.

[18] Falin G.I. Comparability of migration process. Theory Probability and Its Application. – 1988.- Vol. 33. – N 2. – P. 392-396.

[19] Bright L., Taylor P. G. Calculating the equilibrium distribution in level dependent quasi-birth-and-death processes. *Stochastic Modelsспроб* 1995. Vol. 11, № 3. P. 497–525.

[20] Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. Москва: Наука, 1967. 576 с.

[21] Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. Москва: Наука, 1971. 576 с.